Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $x = 4n+1; 1+5+9+...+(4n+1) = 231; \frac{(4n+2)(n+1)}{2} = 231; 2n^2 + 3n - 230 = 0; \ n = 10, \ x = 41$

2. $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$; $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$

3. $y > 1, y = x^2 + 1; \ f^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty), \ f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

4. Submulțimile cerute sunt de forma $\{1, a, b\}, \ a, b \in \{2, 3, ..., 10\}$, adică $C_9^2 = 36$ submulțimi cu trei elemente

5. $\sqrt{(2-m)^2 + (2+m)^2} = 4$; $m \in \{\pm 2\}$

6. $\cos\frac{23\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \cos\left(2\pi - \frac{23\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$.

Soluții

1. $\left[(1-i)^2\right]^{12}=(-2i)^{12}=2^{12}\in\mathbb{R}$.

2. $x^2-6x+5=0$; $x\in\{1,5\}$.

3. $f^{-1}:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\ln(x-1)$.

4. $p=\frac{81}{90}=0,9$.

5. $M(1,3)$ este mijlocul lui (BC); $AM=5$.

6. $m(m-2)+3\cdot(-1)=0$; dar $m>0$, deci $m=3$.

Soluții

1. $\left(\sqrt{2}\right)^{12}=2^6$; $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{12}=4^4$; $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12}=5^3$; $2^6<5^3<4^4$; $\sqrt{2},\sqrt[4]{5},\sqrt[3]{4}$

2. $\min f=-\frac{\Delta}{4a}$; $\min f=-3$

3. $x\in(1,\infty)$; $\lg(x-1)(6x-5)=\lg 100$; $x=5$

4. $p=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$

5. ecuația perpendicularei din A pe $d: 3x+2y-26=0$

6. $\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2=i^2=-1$

2. $V\left(-\frac{5}{2},-\frac{21}{4}\right)$; $x_V, y_V<0 \Rightarrow V\in C_{III}$

3. $3^x=t>0\Rightarrow 3t^2-10t+3=0$, deci $t\in\left\{\frac{1}{3};3\right\}$, adică $x\in\{-1;1\}$.

4. $9\cdot 9$ numere $\overline{aab}$; $9\cdot 9$ numere $\overline{aba}$, $9\cdot 9$ numere $\overline{baa}$; $p=0,27$

5. $-a(5a-1)+2(a+1)=0$; $a\in\left\{1;-\frac{2}{5}\right\}$

6. $\frac{6\cdot 10\cdot \sin A}{2}=15\sqrt{3}$; $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos A=\frac{1}{2}$; $BC=2\sqrt{19}$

Soluții

1. $\frac{2}{5}$

2. $x \in \left[5-\sqrt{13}, 5+\sqrt{13}\right]$; $x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$

3. $f(x) = y \Leftrightarrow 3\log_2 x = y \Leftrightarrow x = 2^{\frac{y}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^y} > 1 \Leftrightarrow y > 0$ (adevărat), deci $f^{-1} : (0;\infty) \to (1;\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2^x}$.

4. Numărul căutat e dat de numărul funcțiilor $g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$; $4^3 = 64$ funcții

5. E centrul paralelogramului $E(3,3)$; $\frac{x_B + x_D}{2} = 3$, $\frac{y_B + y_D}{2} = 3$; $D(-1,10)$

6. $\frac{AC}{\sin B} = 2R$; $AC = \sqrt{3}$

Soluții

1. 495

2. $f(x)=ax^2+bx+c; a-b+c=1, c=1, a+b+c=3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$

3. $\cos 2x \sin x = 0$; $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$

4. $A_4^3=24$

5. $AB=\sqrt{17}, BC=2\sqrt{17}, AC=5$; $\cos B=\frac{15}{17}$

6. $R=\frac{c}{2\sin C}$; $R=6$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. 1

2. $\max f = -\frac{\Delta}{4a}$; $\max f = 0$

3. $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $x \in \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. $C_n^2 = 120$; $n = 16$

5. $ABDC$ paralelogram; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; $AD = CB$; $ABDC$ dreptunghi; $A = \frac{\pi}{2}$

6. Triunghiul este dreptunghic; $S = 6,\ p = 6$; $r = 1$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $z^4 = -4 \Leftrightarrow (z+2i)(z-2i) = 0 \Rightarrow z_1 = -2i,\ z_2 = 2i$.
2. $f(1) = 2,\ f(0) = 3;\ c = 3,\ a = -2$
3. $\sqrt[3]{7x+1} = x+1;\ x^3 + 3x^2 - 4x = 0;\ x \in \{-4, 1, 0\}$
4. $A_5^4 = 120$
5. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF};\ \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AF};\ A, F, C$ coliniare
6. $p = 21,\ S = 84;\ \dfrac{56}{5}$.

Soluție

1. $a_1 = 1, a_n = a_1 + (n-1)r = 2n - 1 = x$. $S_n = \frac{n(1+x)}{2} = n^2 = 225 \Rightarrow n = 15 \Rightarrow x = 29$.

2. $\Delta = m^2 + 8m > 0$ și $|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow s^2 - 4p = 9 \Leftrightarrow m^2 + 8m - 9 = 0 \Rightarrow m \in \{-9;1\}$.

3. $2^x = 2^{-x+1} + 1 \overset{2^x = t > 0}{\Rightarrow} t = 2 \Rightarrow x = 1$.

4. $C_{17}^{15} = C_{17}^{2} < C_{17}^{3}$.

5. $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|3\overrightarrow{BC}\right| = 3 \cdot 4 = 12$.

6. Avem $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + ... + \sin^2 90^\circ = \left(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ\right) + ... + \left(\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ\right) + \cos^2 45^\circ + 1 = \frac{91}{2}$.

Soluții

1. $z^2+z+1=0 \Rightarrow z^3=1 \Rightarrow z^4=z$, $z\neq 0$. Deci $z^4+\frac{1}{z^4}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=-1$.

2. $f(x)=ax+b, a\neq 0$; $f(f(x))=a^2x+ab+b$; $2f(x)+1=2ax+2b+1$; $f(x)=2x+1$.

3. $\lg\frac{x+1}{9}=\lg\frac{10}{x}$; $x=9$.

4. $T_{k+1}=C_{10}^{k}\cdot 3^{10-k}\cdot 3^{\frac{k}{3}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 3^{\frac{k}{3}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow k\,\vdots\,3$, cum $k\in\{0,1,2,...,10\}$ rezultă $k\in\{0,3,6,9\}$, deci 4 termeni raționali.

5. $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

6. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$; $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{-2}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $a^2 = 2b$; $a + 2 = 2 \cdot 17$; $a = 32, b = 512$.

2. $-3(-3x+2)+2=0$; $x=\dfrac{4}{9}$.

3. $tg(-x) = -tgx$; $tgx = 1$; $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

4. 9 funcții.

5. $AD = 2DB$; $AE = 2EC \Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} = 2 \Rightarrow DE \parallel BC$.

6. $C = \dfrac{7\pi}{12}$; $\sin C = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $R = \dfrac{c}{2\sin C}$; $R = 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. 1

2. $\frac{2x^2+8x+7}{x^2+5x+6}=\frac{7}{6}$; $x\in\left\{-\frac{13}{5},0\right\}$

3. $2x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

4. $T_7=C_{12}^6\cdot\sqrt{a}$; $a=4$

5. $m_d=\frac{2}{3}, m_{d'}=\frac{2}{3}$; $M(1,1)\in d, M'=s_A(M)\Rightarrow M'(-7,7)$; $y-7=\frac{2}{3}(x+7)$; $d': 2x-3y+35=0$

6. $\frac{4}{3}$

Soluții

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)^2=-4\in\mathbb{Z}$

2. x, y sunt rădacinile ecuației $a^2-4a+3=0$, $a\in\{1,3\}$; $(x,\ y)\in\{(1,3),(3,1)\}$

3. $6\sqrt{x-2}=x+6$; $x^2-24x+108=0$; $x\in\{6,18\}$

4. $T_{k+1}=C_9^k x^{18-3k}$; $T_7=84$

5. $d'\perp d, d':4x+3y-12=0$; $d'\cap d=\{A'\}, A'\left(\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)$; $d(A,d)=2$

6. $\cos B=\frac{1}{8}$, $\cos C=\frac{3}{4}$, $\cos 2C=\frac{1}{8}$; $\cos B=\cos 2C\Rightarrow m(\sphericalangle B)=2m\sphericalangle(C)$

Soluții

1. $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2$

2. $a-3<0$ și $\Delta<0 \Rightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;3) \\ a\in\left(0;\frac{12}{5}\right)\end{cases}$, deci $a\in\left(0;\frac{12}{5}\right)$

3. $x=\frac{1}{3}$

4. $C_n^2=45$; $n=10$

5. $m_{AB}=-\frac{1}{7}$; $y-3=-\frac{1}{7}(x-2)$; $x+7y-23=0$

6. $\frac{AC}{\sin B}=2R$; $B=\frac{\pi}{3}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)=\log_3 18=2+\log_3 2$; deci rezultatul este 2.

2. $f(x)=ax^2+bx+c,\ f(0)=2\ ,\ f(1)=0\ ,\Delta=0\ ;\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+2$

3. $tgx=-1;\ x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$

4. Numărul cerut este dat de numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,3,5,7,9\}$; $5^4=625$

5. $m_{CD}=\frac{4}{3}\ ;\ y-2=\frac{4}{3}(x+2)\ ;\ 4x-3y+14=0$

6. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ \sin\alpha=-\frac{12}{13}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. 1
2. $x^2+ax+2\geq 0\,,\forall x\in\mathbb{R}$; $\Delta\leq 0$; $a\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$
3. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; $x=\frac{1}{2}$.
4. $8!(n-8)!=10!(n-10)!$; $n^2-17n-18=0$; $n=18$
5. $AB=5$, $BC=4$, $CA=\sqrt{41}$; $B=\frac{\pi}{2}$
6. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$

Soluții

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=-8\in\mathbb{Z}$

2. $x^2-x+2-y=0$; $\Delta\ge 0$; $\operatorname{Im} f=\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$

3. $x=-12$

4. $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$

5. $m_d=\frac{5}{4}$; $d': y-1=-\frac{4}{5}(x-1)$; $4x+5y-1=0$

6. $AC=6\sqrt{2}$; $BC=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$; $P=3\left(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

Soluții

1. $x \in \left\{1 \pm i\sqrt{3}\right\}$

2. $\Delta = 1$, $\min f = -\frac{1}{4}$

3. $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $C_7^0 = C_7^7 = 1$, $C_7^1 = C_7^6 = 7$, $C_7^2 = C_7^5 = 21$, $C_7^3 = C_7^4 = 35$; doar 7 este prim, deci 2 cazuri favorabile; $p = \frac{1}{4}$

5. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{a+4} \Rightarrow a \in \left\{-6; 2\right\}$

6. $\overrightarrow{AB}(7,-7); \overrightarrow{AC}(4,-2); \overrightarrow{BC}(-3,5)$; -14

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $(\sqrt{3})^{12}=3^6$; $(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4$; $(\sqrt[4]{8})^{12}=8^3$; $\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$.

2. $g(1)=0$; $f(x)=ax+b$, $f(1)=0$; $g(0)=3 \Rightarrow f(2)=3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$.

3. $3^x=y$, $3y^2-30y+27=0$; $y\in\{1,9\}$; $x\in\{0,2\}$.

4. $9\cdot 10\cdot 10=900$ cazuri posibile; $4\cdot 5\cdot 5=100$ cazuri favorabile; $p=\dfrac{1}{9}$.

5. $A'(2,-1)$; $m_{AA'}=-3$; $m_a: y-2=-3(x-1)$; $3x+y-5=0$.

6. $\dfrac{\operatorname{ctg}1-\operatorname{tg}1}{2}=\dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg}1}-\operatorname{tg}1}{2}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 1}{2\operatorname{tg}1}=\dfrac{\cos 2}{\sin 2}=\operatorname{ctg}2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $2<\sqrt{5}, \log_3 4<2$

2. $x\in\{1\pm i\}$

3. $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1; \sin x\cos x=0, x\in[0,2\pi) \Rightarrow x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$; $x\in\left\{\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$

4. 21

5. $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=4\Rightarrow CN=\frac{1}{5}AC\Rightarrow\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, deci $m=-\frac{1}{5}$

6. $OA=\sqrt{5}$; $AB=\sqrt{2}$; $OB=\sqrt{13}\Rightarrow P=\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{5}$

Soluții

1. $x_{1,2} = 4 \pm 3i$

2. $\Delta > 0$ **,** $\Delta = 5a^2 - 8a + 13$ **;** $a \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{13}{5}, \infty\right) \setminus \{-1\}$

3. $\left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1$ **;** $x \in \{5, 17\}$

4. 0

5. $d' : y - 2 = 1(x-1)$ **;** $d' : x - y + 1 = 0$

6. $\frac{7}{9}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. i

2. $g(x)=y;\ f(y)=0, y^2-3y+2=0$; $y\in\{1,2\}$; $x\in\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$

3. $x>-\frac{3}{7};\ \lg(x+9)(7x+3)=\lg\left[10\left(x^2+9\right)\right]\Rightarrow 3x^2-66x+63=0$, deci $x\in\{1;21\}$

4. $n(n-1)<20$; $n\in\{2,3,4\}$

5. $A\left(\frac{1}{2},0\right)\in d_2; d(d_1,d_2)=d(A,d_1); d(A,d_1)=\frac{\sqrt{5}}{10}; d(d_1,d_2)=\frac{\sqrt{5}}{10}$

6. $\sin 75^0=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin 15^0=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $r=2;\ a_1=2;\ S_{20}=\frac{20(a_1+19r)}{2}=400$

2. $x^2-2x-4=0\,;\,x\in\left\{1\pm\sqrt{5}\right\}$

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right);\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=2$

4. Probabilitatea este $p=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$.

5. $G\left(\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right)$

6. $\sin 4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{2\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1+\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2}=-\frac{24}{25}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. -1

2. $f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f(1)=f(-1)=0$, $f(2)=6 \Rightarrow a=2=-c; b=0$, deci $f(x)=2x^2-2$.

3. $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{11}{6}$; $\log_2 x=1$; $x=2$

4. $(1+x)^2+(1-x)^2=2+2x^2$; $|x|\geq 1 \Rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow 2+2x^2\geq 4$

5. $m_{AC}=-\frac{12}{5}$, $m_h=\frac{5}{12}$; $h: y+1=\frac{5}{12}(x-2)$; $h: 5x-12y-22=0$

6. $(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(3\vec{i}-4\vec{j})=-14$

Soluții

1. $-3+4i$

2. Se ajunge la ecuația $ax^2+(a-3)x-3=0$, şi cum $\Delta=(a+3)^2\ge 0,\ \forall a\in\mathbb{R}^*$

3. $2^x=y; y^2-6y+8=0$; $y\in\{2,4\}$; $x\in\{1,2\}$

4. $\overline{ab}\in\{10,11,12,...,40\}$ şi $(a+b)\vdots 3\Rightarrow\ p=\dfrac{10}{31}$

5. M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului, $HM\perp BA$ si analoagele; HM mediatoarea $[BA]$ si analoagele; H este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$

6. $2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soluție

1. $\Delta < 0 \Rightarrow z_{1,2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ şi conjugate. $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$, dar $z_1 \cdot z_2 = 25 \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 10$.

2. $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = -8x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$, deci *f* este strict descrescătoare.

3. Ecuația dată se scrie $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$. Notând $3^x = y$ obținem ecuația $y^2 + y - 2 = 0$ cu soluțiile -2 şi 1. Cum $3^x > 0$, convine doar $3^x = 1$, deci $x = 0$.

4. f bijectivă $\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = A$. Atunci $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 0$.

5. Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M(0;1)$. Punctul $P(x, y)$ aparține mediatoarei segmentului $[AB]$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$. Avem $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ iar $\overrightarrow{MP} = x\vec{i} + (y-1)\vec{j}$.
Ecuația mediatoarei lui $[AB]$ va fi : $2x - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$.

6. Avem $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Soluție

1. $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^6 = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 = i \Rightarrow |z| = 1$.

2. f este funcție de gradul 2 cu $\Delta = 1$. Valoarea maximă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{8}$.

3. Notând $\lg x = y$ obținem ecuația $y^2 + 5y - 6 = 0$ cu soluțiile -6 și 1.

$\lg x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10^6}$, iar $\lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10$.

4. O funcție $f:\{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(0) = f(1) = 2$ este unic determinată de un tabel de tipul

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	2	a	b

unde $a, b \in \{0,1,2,3\}$.

Vor fi $4^2 = 16$ funcții cu proprietatea cerută.

5. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$, rezultă că $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{5}$, $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{10}$ și $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$. $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

6. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{8}{9}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}=\left[(1+i)^2\right]^5+\left[(1-i)^2\right]^5=(2i)^5+(-2i)^5=0$.

2. Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$. $\sqrt{2}<\sqrt{3}<2 \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt{3}\right)>f(2)$.

3. Se impune condiția $x\geq\frac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat, ecuația devine $2x-1=9 \Leftrightarrow x=5$.

4. $f(0)\in\{1;3\}$. Dacă $f(0)=1\Rightarrow 4^3=64$ de funcții. Dacă $f(0)=3\Rightarrow 128$ de funcții.

5. $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$; $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

6. $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

Soluție

1. $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = 2 \pm \sqrt{3}$, deci $a = 4$.

2. $f(2x) \leq 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{4};1\right]$

3. $x \in [0;2]$, $x_1 = 1 \in [0;2]$, $x_2 = -2 \notin [0;2]$.

4. Mulțimea A are $2^6 - 1$ submulțimi nevide dintre care $2^3 - 1$ au toate elementele impare.
Probabilitatea cerută este $\frac{2^3 - 1}{2^6 - 1} = \frac{7}{63} = \frac{1}{9}$.

5. $\sin C = \frac{1}{\sqrt{65}}$.

6. Avem $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x > 0$, cu egalitate numai pentru $x = 1$.
Cum $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha > 0$ și atunci $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Soluție

1. $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}$

Fie a numărul din enunț. Avem $a=\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=9$, deci $a\in\mathbb{N}$.

2. Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte dacă şi numai dacă ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale $\Leftrightarrow\ \Delta>0\ \Leftrightarrow\ m^2-8>0\ \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$.

3. Se impune condiția $x\in(-1;+\infty)$. Ecuația dată este echivalentă cu $\log_3\left[(x+1)(x+3)\right]=\log_3 3\ \Leftrightarrow$ $x^2+4x=0$ cu soluțiile 0 şi -4. Cum $x\in(-1;\infty)$, rezultă că $x=0$ este unica soluție a ecuației date.

4. Mulțimea A are 2^5-1 submulțimi nevide. $120=2\cdot3\cdot4\cdot5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$, deci 2 cazuri favorabile.

Probabilitatea $=\dfrac{2}{31}$.

5. Fie $G(x_G,\ y_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC.

Avem $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{4}{3}$ şi $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{5}{3}$.

6. Folosim relația $|\sin x|=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$.

Cum $\dfrac{\pi}{8}\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\ \sin\dfrac{\pi}{8}>0$. Atunci $\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Soluție

1. $\log_{16} 24 = \dfrac{\log_2\left(2^3 \cdot 3\right)}{\log_2\left(2^4\right)} = \dfrac{3+\log_2 3}{4} = \dfrac{3+\dfrac{1}{\log_3 2}}{4} = \dfrac{3+\dfrac{1}{a}}{4} = \dfrac{1+3a}{4a}$.

2. Fie a şi b numerele căutate. Avem $\begin{cases} a+b=1 \\ a\cdot b=-1 \end{cases}$.

Numerele a și b vor fi soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2-x-1=0$, adică $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. Ecuația se scrie $2\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^x=160 \Leftrightarrow 2^{2x}+2\cdot 2^x=80 \Leftrightarrow \left(2^x+1\right)^2=81$ şi cum $2^x+1>0$ obținem $2^x+1=9$, de unde $x=3$.

4. Putem alege 3 fete din cele 12 în C_{12}^3 moduri. La fiecare alegere a fetelor putem alege 2 băieți din cei 10 în C_{10}^2 moduri. Comitetul clasei poate fi ales în $C_{12}^3\cdot C_{10}^2=9900$ moduri.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuația paralelei prin C la AB este $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-3}{2}$, adică $2x+3y-11=0$.

6. Deoarece $6\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, rezultă că numărul real 6 se reprezintă pe cercul trigonometric în cadranul IV. În concluzie $\sin 6<0$.

Soluție

1. Numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{2009}}$ sunt în progresie geometrică cu rația $\frac{1}{2}$.

Rezultă că $s = \dfrac{\frac{1}{2^{2010}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^{2009}}$ și de aici $1 < s < 2$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = -4x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Punctul de intersecție cerut este $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

3. Utilizând relația $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuația devine $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Notăm $\sin x = y$ și obținem ecuația $y^2 + y - 2 = 0$ cu soluțiile 1 și -2.

Ecuația $\sin x = -2$ nu are soluții (pentru că $-1 \le \sin x \le 1$), iar $\sin x = 1 \Leftrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Sunt 5^3 moduri de alegere a valorilor $f(0),\ f(1),\ f(2)$, deci 125 de funcții.

5. Patrulaterul convex *ABCD* este paralelogram dacă și numai dacă diagonalele sale au același mijloc.

Mijlocul lui $[AC]$ este $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$. Fie $D(x, y)$. Mijlocul lui $[BD]$ este $M'\left(\frac{-1+x}{2}; \frac{1+y}{2}\right)$.

$M = M' \Leftrightarrow \frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$ și $\frac{1+y}{2} = 1 \Rightarrow D(4, 1)$.

6. Deoarece $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0$ și atunci $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5}$.

Deoarece $\frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{x}{2} > 0$, deci $\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Soluție

1. $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27} = 2 + 2 + 3 = 7 \in \mathbb{N}$.

2. Funcția *f* este funcție de gradul al doilea cu $\Delta = -8$ și $a = 3 > 0$.

Valoarea minimă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

3. Notând $4^x = y$ obținem ecuația $y^2 + 3y - 4 = 0$ cu soluțiile -4 și 1.

Cum $4^x > 0$, convine doar $4^x = 1$, deci $x = 0$.

4. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ n este pătrat perfect.

În mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ sunt 100 de elemente dintre care 10 sunt pătrate perfecte: $0^2, 1^2, 2^2, \dots, 9^2$.

Probabilitatea cerută este $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

5. Avem $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{CD} = (a-1)\vec{i} + \vec{j}$. Atunci $AB \| CD \Leftrightarrow \frac{a-1}{-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

6. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 8 + 5\sqrt{3}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. Avem $|3+4i|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ şi atunci $|z|=\left|(3+4i)^4\right|=|3+4i|^4=5^4=625$.

2. Fie $V\left(x_V, y_V\right)$ vârful parabolei $\Rightarrow x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2},\ \ y_V=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{2}$. Evident $x_V+y_V=0$.

3. Ecuația devine $\sin x(1-2\cos x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0$ sau $1-2\cos x=0$.

Cum $x\in[0, 2\pi)$, avem $\sin x=0 \Leftrightarrow x=0$ şi $x=\pi$, iar $\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ şi $x=\frac{5\pi}{3}$, deci 4 soluții.

4. Numărul funcțiilor bijective $g:\{2,3,4,5\}\to\{1,3,4,5\}$ este $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{CD}=(a-1)\vec{i}+\vec{j}$.

Atunci $AB\perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow -3(a-1)+2=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

6. Avem $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Atunci $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$.

Cum $B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ obținem $B=C$, adică triunghiul ABC este isoscel.

Soluție

1. $z=(2+i)^3+(2-i)^3=2^3+3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2+i^3+2^3-3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2-i^3=4$, deci $|z|=4$.

2. $f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow c=1;\ b=-3;\ a=-1$, deci $f(x)=-x^2-3x+1 \Rightarrow f(2)=-9$.

3. Ecuația se scrie $2\cdot 3^{2x}+2^x\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}=0$ și împărțind prin 2^{2x} se obține $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-3=0$.

Notăm $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow 2y^2+y-3=0 \Rightarrow y_1=1$ și $y_2=-\frac{3}{2}$.

Cum $\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$, convine doar $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

4. Mulțimea *A* are 2010 elemente, iar numărul celor divizibile cu 402. Probabilitatea cerută este $\frac{1}{5}$.

5. Triunghiul *AOB* este dreptunghic în *O*. Avem $AO=3,\ BO=4,\ AB=5$.

Fie *x* distanța de la *O* la dreapta *AB*. Atunci $AO\cdot OB=x\cdot AB \Rightarrow x=\frac{AO\cdot OB}{AB} \Rightarrow x=\frac{12}{5}$.

6. $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAD)=45^\circ$.

Aria paralelogramului este $AB\cdot AD\cdot\sin\widehat{BAD}=24\sqrt{2}$.

Soluție

1. Prin împărțire se obține că $\frac{1}{7}=0,(142857)$. Atunci $a_{60}=7$.

2. Avem $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2-g(x)=-3x$, iar $(g\circ f)(x)=g(f(x))=3f(x)+2=8-3x$. Atunci $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)=-3x-(8-3x)=-8,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3. Fie $f(x)=f(y)\Rightarrow 3x^3+1=3y^3+1\Rightarrow x=y$. Rezultă că funcția f este injectivă.

4. Sunt 900 de numere de trei cifre, iar numărul celor divizibile cu 50 este dat de numărul k-urilor cu proprietatea $k\in\mathbb{N},\ 100\le 50k<1000$ adică $2\le k<20$. Probabilitatea cerută este $\frac{18}{900}=\frac{1}{50}$.

5. Ecuația dreptei AB este: $y=x-3$. Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow C\in AB \Leftrightarrow a=-4$.

6. Din teorema cosinusului obținem $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\frac{1}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Numerele 1, 4, 7, … ,100 sunt 34 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația 3.
Atunci $1+4+7+...+100=\frac{(1+100)\cdot 34}{2}=1717$.

2. $\text{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R} \,/\, \exists x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\}$. Avem $f(x)=y \Leftrightarrow x^2+x+1-y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta\geq 0$. $\Delta=1-4(1-y)$; $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow y\geq\frac{3}{4}$. În concluzie, $\text{Im}(f)=\left[\frac{3}{4};\infty\right)$.

3. $E=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

4. Termenii dezvoltării sunt $T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}\cdot 1^k=C_5^k\sqrt{2^{5-k}}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Deoarece $C_5^k\in\mathbb{N}$ avem $T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 5-k=\text{par} \Leftrightarrow k\in\{1,3,5\}$. Dezvoltarea are trei termeni raționali.

5. *ABCD* pătrat $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$. Atunci $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|=2\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2\sqrt{2}$.

6. $\sin 105^\circ=\sin\left(45^\circ+60^\circ\right)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Soluție

1. Avem $2<3<4 \Rightarrow \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4 \Rightarrow 1<\log_2 3<2 \Rightarrow \log_2 3\in(1,2)$.

2. $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 9-4m<0 \Leftrightarrow m>\frac{9}{4} \Leftrightarrow m\in\left(\frac{9}{4},\infty\right)$.

3. Avem $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Ecuația devine $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este: $\{2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$ avem $C_n^2+C_n^3=\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{3n!+(n-2)n!}{3!(n-2)!}=\frac{n!(n+1)}{3!(n-2)!}=\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}=C_{n+1}^3$.

5. Avem $d_1\cap d_2=\{A(1;-1)\}$. Atunci $A\in d_3 \Leftrightarrow 1-1+a=0 \Leftrightarrow a=0$.

6. Din teorema cosinusului, $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow BC=\sqrt{13}$.
Perimetrul triunghiului ABC este $AB+BC+AC=7+\sqrt{13}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $z^2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{z}$.

2. Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = -x^2+4x-3$. Tabelul de semn al lui g este:

x	$-\infty$		1		3		∞
$g(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - -$	

$g(x) \geq 0 \iff x \in [1;\ 3]$.

3. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{y^2+1}{y} \Rightarrow (x-y)(xy-1) = 0 \Rightarrow x = y$ sau $xy = 1$.

Dar $x, y \in (1, \infty) \Rightarrow xy > 1$. Avem $\begin{cases} x, y \in (1, \infty) \\ f(x) = f(y) \end{cases} \Rightarrow x = y$, deci f este injectivă.

4. O funcție $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par este unic determinată de un tabel de tipul

x	1	2	3
$f(x)$	a	b	c

unde $a \in \{0,\ 2\}$ iar $b, c \in \{0,1,2,3\}$.
Vor fi $2\cdot 4\cdot 4 = 32$ funcții cu proprietatea cerută.

5. Din teorema cosinusului, avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Atunci $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cos A = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2} = \dfrac{5}{2}$.

6. $\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$

$\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Soluție

1. Avem $z=\frac{4a}{4+a^2}+\frac{4-a^2}{4+a^2}i$. Atunci $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0 \Leftrightarrow 4-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$.

2. Rezolvăm sistemul $\begin{cases}2x+3=y\\ x^2-4x+12=y\end{cases}$ și obținem o singură soluție: $\begin{cases}x=3\\ y=9\end{cases}$.

3. Se impun condițiile $2x-1\ge 0$ și $x\ge 0$, adică $x\in\left[\frac{1}{2},\,\infty\right)$.

Prin ridicare la pătrat ecuația devine $2x-1=x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$.

Cazurile favorabile sunt $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,4)$, $(4,2)$ și $(3,3)$. Probabilitatea cerută este $\frac{5}{36}$.

5. $\overrightarrow{MA}=-\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{MB}=2\vec{i}+2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{i}+5\vec{j} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\sqrt{26}$.

6. Avem succesiv: $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=$
$=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\left(1-\sin^2 a\right)\sin^2 b=\sin^2 a-\sin^2 b$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Avem $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}=\left(10^{\lg 2}\right)^2+\sqrt[3]{(-3)^3}=2^2+(-3)=1$.

2. $\mathrm{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R} \ / \ \exists x\in\mathbb{R}$ așa încât $f(x)=y\}$.

Pentru $y=0$ avem $f(0)=0$, iar pentru $y\neq 0$ avem: $f(x)=y \Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4-4y^2\geq 0$, adică $y\in[-1;1]$. În concluzie, $\mathrm{Im}(f)=[-1;1]$.

3. Notând $3^x=y$ ecuația devine: $3y=-y+8$ de unde obținem $y=2$. Avem $3^x=2 \Leftrightarrow x=\log_3 2$.

4. $f(1)=3$, $f(3)=4\Rightarrow$ există 16 funcții $g:\{2,3\}\to\{1,2,3,4\}$. $f(1)=4$, $f(3)=3\Rightarrow$ încă 16 funcții, deci în total 32 funcții.

5. Fie d drepta ce trece prin $O(0,\ 0)$ și este paralelă cu dreapta *AB*.

Un vector director al dreptei d este $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuația dreptei d este $\frac{x}{-3}=\frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x+3y=0$.

6. Ridicând la pătrat cele două egalități din ipoteză, se obțin relațiile :

$\cos^2 a+\cos^2 b+2\cos a\cos b=\frac{1}{4}$ și $\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b=1$. Adunând membru cu membru aceste două egalități obținem $2+2(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=\frac{5}{4}$, adică $2+2\cos(a-b)=\frac{5}{4}$ de unde rezultă $\cos(a-b)=-\frac{3}{8}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Fie $a = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}$. Prin calcul direct obținem $a = \frac{20}{27} \Rightarrow [a] = 0$.

2. Scăzând cele două ecuații obținem $x^2 + 4x + 3 = 0$ de unde $x = -1$ sau $x = -3$.
Sistemul are două soluții: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ și $\begin{cases} x = -3 \\ y = 19 \end{cases}$.

3. Avem $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$, de unde $x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

4. $T_{k+1} = C_{100}^{k} \cdot 5^{\frac{100-k}{4}} \Rightarrow k \vdots 4 \Rightarrow k \in \{0, 4, \ldots, 100\}$. Deci sunt 26 termeni raționali.

5. Avem $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 8\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare.

6. Aria triunghiului dat este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $a = 4,\ b = 5,\ c = 7$ și $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Obținem $p = 8$ și $S = 4\sqrt{6}$. Atunci $r = \frac{S}{p} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Fie $a=\sqrt{2}$ şi $b=-\sqrt{2}$. Avem $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $a+b=0\in\mathbb{Q}$. Afirmația din enunț este falsă.

2. $f\left(f\left(x\right)\right)=f^2\left(x\right)\Rightarrow x+4=x^2+4x+4\Rightarrow x\in\{-3,0\}$.

3. Notăm $2^x=y$ şi obținem ecuația $y^2-y-12=0$ cu soluțiile $y_1=-3$ şi $y_2=4$.

$2^x=-3$ nu are soluții, iar $2^x=4\Leftrightarrow x=2$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),.....,(6,\ 6)\}$.

Fie $(a,b)\in A\times A$. Produsul $a\cdot b$ este impar dacă şi numai dacă *a* şi *b* sunt impare.

Cazurile favorabile sunt: $(1,1)$, $(1,3)$, $(1,5)$, $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,5)$, $(5,1)$, $(5,3)$ şi $(5,5)$.

Probabilitatea cerută este $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0,25$.

5. $AC=2\sqrt{2}\Rightarrow$ latura pătratului este 2, deci aria este 4.

6. Avem $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=2\sin 75^\circ=2\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Soluție

1. $z=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}=-i \Rightarrow \operatorname{Re}(z)=0$.

2. Avem $x^2+mx+1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta\leq 0 \Leftrightarrow m^2-4\leq 0 \Leftrightarrow m\in[-2,2]$.

3. $\arcsin 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\in[-1,1]$ și $\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=2x$. Soluția ecuației este $x=-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$.

4. Mulțimea A conține 5 elemente pare și 5 impare. Dacă o submulțime cu 5 elemente a lui A conține două elemente pare, rezultă că celelalte trei elemente sunt impare. Putem alege 2 elemente pare din cele 5 în C_5^2 moduri, iar 3 elemente impare din cele 5 pot fi alese în C_5^3. Numărul cerut în enunț este $C_5^2\cdot C_5^3=100$.

5. Ecuația dreptei BC este $4x+3y-2=0$. Atunci $d(O,\ BC)=\frac{|4\cdot 0+3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{2}{5}$.

6. $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow \cos\alpha<0$ şi atunci $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$.

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$.

Soluție

1. $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}=\frac{7\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1}=\frac{5\sqrt{2}+1}{7}\in(1,\,2)\Rightarrow\left[\frac{7}{5\sqrt{2}-1}\right]=1$.

2. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(-1)^2-2(-1)}{-1}=-3\in\mathbb{Z}$.

3. Ecuația este echivalentă cu $2\cdot 3^x+\frac{3}{3^x}=7$. Făcând substituția $y=3^x$ obținem ecuația $2y^2-7y+3=0$ cu soluțiile 3 și $\frac{1}{2}$. Avem $3^x=3\Leftrightarrow x=1$, iar $3^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\log_3 2$.

4. Funcția f este strict crescătoare $\Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$.
Orice submulțime a lui *B* poate fi ordonată crescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$ este egal cu numărul submulțimilor cu 4 elemente ale mulțimii *B*, adică $C_6^4=15$.

5. Ecuația dreptei BC este $2x-y+5=0$. Lungimea înălțimii duse din vârful *A* în triunghiul *ABC* este $d(A,\,BC)=\frac{|2\cdot1-3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

6. $E=2\left(\sin75^\circ-\sin15^\circ\right)=4\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=4\sin30^\circ\cos45^\circ=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Soluție

1. Fie r rația progresiei. Avem $a_6 = a_3 + 3r$ și $a_{16} = a_{19} - 3r$, deci $a_6 + a_{16} = a_3 + a_{19} \Rightarrow a_6 + a_{16} = 10$.

2. Ecuația dată are două rădăcini reale distincte dacă și numai dacă $\Delta > 0$. Avem $\Delta = m^2 + 4m - 4$.
$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

3. Făcând substituția $\lg x = y$, ecuația devine $y^2 + y - 6 = 0$ de unde obținem $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.
Avem $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$, iar $\lg x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1000}$.

4. $f(1) > f(2) > f(3) = 1 \Rightarrow$ numărul funcțiilor f este egal cu numărul funcțiilor $g:\{1,2\} \to \{2,3,4,5\}$ strict descrescătoare, adică $C_4^2 = 6$.

5. Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ} = (a-2)\vec{i} + (b+1)\vec{j}$ și $\overrightarrow{NP} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a - 2 = 1$ și $b + 1 = 2$. Punctul căutat este $Q(3, 1)$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$ de unde obținem $AM^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos A\right)$. Din teorema cosinusului avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow 2AB\cdot AC\cdot\cos A = AB^2 + AC^2 - BC^2$.
Atunci $AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$, de unde $AM = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Soluție

1. $(2+i)^4+(2-i)^4=\left((2+i)^2\right)^2+\left((2-i)^2\right)^2=(3+4i)^2+(3-4i)^2=-7+24i-7-24i=-14$.

2. Sistemul $\begin{cases} y=x^2+x+1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ are două soluții: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$. Dreapta de ecuație $y=2x+1$ intersectează parabola de ecuație $y=x^2+x+1$ în punctele $A(0,1)$ și $B(1,3)$.

3. $x\le\frac{11}{2}$; $\sqrt{16+x^2}=11-2x$, prin ridicare la pătrat, rezultă $3x^2-44x+105=0\Rightarrow x_1=3,\ x_2=\frac{35}{3}$, în final $x=3$.

4. Sunt 9000 de numere naturale cu 4 cifre. Numărul celor divizibile cu 9 este dat de numărul k-urilor cu $1000\le 9k\le 9999 \iff 111,(1)\le k\le 1111$, deci există 1000 astfel de numere. Probabilitatea cerută este $\frac{1}{9}$.

5. Centrul de greutate al triunghiului ABC este $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$, adică $G(1,2)$.

Ecuația dreptei OG este $\frac{x}{1}=\frac{y}{2} \iff y=2x$.

6. $2\left(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\right)=4\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=4\cos 30^\circ\cos 45^\circ=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$.

Soluție

1. Fie z numărul din enunț. Avem $z = 2^6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^6 = 2^6 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$. Folosind formula lui Moivre, obținem: $z = 2^6 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = -2^6 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -64$.

2. $(f \circ f)(512) = f\left(f(512)\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{f(512)}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$.

3. Utilizând formula $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ecuația devine $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Notăm $y = \sin x$ şi obținem ecuația $2y^2 - y - 1 = 0$ cu soluțiile $-\frac{1}{2}$ şi 1.

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, iar $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Fiecare submulțime cu trei elemente a lui M poate fi ordonată strict crescător într-un singur mod. Numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c \in M$ şi $a < b < c$ este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M, adică $C_6^3 = 20$.

5. Punctul $A(0,\ 3)$ se află pe dreapta d_1. Atunci distanța cerută este

$$\mathrm{d}(d_1,\ d_2) = \mathrm{d}(A,\ d_2) = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 11|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

6. Avem $\overrightarrow{AD}^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = 4$, iar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Atunci $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 5$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

2. $m < 0$ şi $\Delta \le 0$, rezultă $m \in (-\infty; 0)$.

3. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56 \Leftrightarrow 2^x\left(1 + 2 + \frac{1}{2}\right) = 56 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$.

4. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[3]{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ n este cub perfect. În mulțimea A sunt 10 cuburi perfecte: 1^3, 2^3, ..., 10^3.
Probabilitatea cerută este $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100} = 0,01$.

5. Cum $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$, rezultă că $M \in (BC)$ şi $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

6. $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3}{5}$.

Soluție

1. $2\left(2^{-a+2}+1\right)=2^{a-1}+2^{a+1}+1 \overset{2^a=t>0}{\Rightarrow} 5t^2-2t-16=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow a=1$.

2. $\begin{cases} x_V=-a+\dfrac{1}{2} \\ y_V=a-\dfrac{1}{4} \end{cases}$. Deci $x_V+y_V=\dfrac{1}{4}$.

3. $z^2+2z+4=0 \Big| \cdot \underbrace{(z-2)}_{\neq 0} \Rightarrow z^3=8$. Așadar $z^2-\dfrac{8}{z}=\dfrac{z^3-8}{z}=0$.

4. Mulțimea dată are 40 de elemente, dintre care divizibile cu 2 și cu 5, deci cu 10, sunt numerele $10, 20, 30$ și 40. Probabilitatea este egală cu $\dfrac{1}{10}$.

5. Fie $\{O\}=AC \cap BD$ și $MN \perp AB,\ O \in (MN), M \in (DC), N \in (AB)$. Atunci $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=$

$=\left|\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{NO}+2\overrightarrow{OM}\right|=2NM=8$.

6. $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha>0;\ \cos\alpha=\dfrac{5}{13} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{12}{5};\ \operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\dfrac{120}{119}$.

Soluție

1. $A-B=(-3\ ;\ 1]\Rightarrow (A-B)\cap\mathbb{Z}=\{-2\ ;-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}\Rightarrow card\left((A-B)\cap\mathbb{Z}\right)=4$.

2. $2x+1=x^2-x+3\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{\ 1\ ;\ 2\ \}\Rightarrow (x\ ;\ y)\in\{(1\ ;\ 3),(2\ ;\ 5)\}$, deci punctele sunt $A(1\ ;\ 3),B(2\ ;\ 5)$.

3. $\begin{cases}x-1\geq 0\\ 2-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[1\ ;\ 2]\Rightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1\Rightarrow x\in\{1\ ;\ 2\}$.

4. $x!<7,\ x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\{0;1;2;3\}$

5. $d(A;d)=\dfrac{|5\cdot 1+12\cdot 1-4|}{\sqrt{5^2+12^2}}\Rightarrow d(A;d)=1$.

6. $tga=\dfrac{1}{2},tgb=\dfrac{1}{5}\Rightarrow tg(a+b)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\dfrac{7}{9}$.

Soluție

1. $|4x-8|=4|x-2|, |4-2x|=2|x-2| \Rightarrow f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. $x^2-2x+a-1=2x+3 \Rightarrow x^2-4x+a-4=0 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow a\in(-\infty,8)$.

3. $\sqrt[3]{x-1}=x-1 \Rightarrow x-1=(x-1)^3 \Rightarrow (x-1)(x^2-2x)=0 \Rightarrow x\in\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$.

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)^9=\left(1+\sqrt{3}\right)^9,\ T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^k\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{k}{2}\in\mathbb{N}$

Numărul termenilor iraționali este $10-\left(\left[\frac{9}{2}\right]+1\right)=5$.

5. $\frac{m+1}{m-1}=\frac{8}{-4}\Rightarrow m=\frac{1}{3}$.

6. $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}\Rightarrow \cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

Soluție

1. $\left[\sqrt{2008}\right]=44$, $\left\{-\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\sqrt{2008}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}=46$.

2. $x_v=-\frac{b}{2a}=2\in[2\,;\,3]$, $f(1)=f(3)=0,\ f(2)=-1\Rightarrow f\left([2\,;\,3]\right)=[-1\,;\,0]$.

3. $\begin{cases}x+8\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[0\,;\,\infty)$, $\sqrt{x+8}=2+\sqrt{x}\Rightarrow x+8=4+4\sqrt{x}+x\Rightarrow x=1$.

4. $D_{56}=\{1,2,4,7,8,14,28,56\}\Rightarrow p=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

5. $6\vec{i}+2\vec{j}=p\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+r\left(\vec{i}-\vec{j}\right)\Rightarrow\begin{cases}p+r=6\\ p-r=2\end{cases}\Rightarrow(p;r)=(4;2)$.

6. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{5+7+8}{2}=10$, $S=10\sqrt{3}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}\Rightarrow R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$; $4,5<\sqrt{21}<4,6\Rightarrow 9<2\sqrt{21}<9,2$,deci $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\right]=19$.

2. $1-x\neq 0,1-2x\neq 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$; $\frac{2x-1}{1-x}-\frac{3x+2}{1-2x}\geq 0\Rightarrow\frac{x^2-3x+3}{(x-1)(2x-1)}\leq 0\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

3. $\sqrt[3]{2-x}=2-x\Rightarrow 2-x=(2-x)^3\Rightarrow(2-x)\left(x^2-4x+3\right)=0\Rightarrow x\in\{1;2;3\}$.

4. $T_{k+1}=C_{49}^k\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{49-k}y^{\frac{k}{2}}$; $\frac{2(49-k)}{3}=\frac{k}{2}\Rightarrow k=28\Rightarrow T_{29}=C_{49}^{28}x^{14}y^{14}$.

5. $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}\Rightarrow\overrightarrow{r_G}=2\vec{i}+2\vec{j}$.

6. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\sqrt{3}.$

Soluție

1. $\left[-\sqrt{8}\right]=-3,\left\{-2,8\right\}=0,2\Rightarrow -3,2$.

2. $\begin{cases} s=5 \\ s^2-2p=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=5 \\ p=6 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\left\{(2,3),(3,2)\right\}$.

3. $2^x=t$, $t^2-10t+16=0\Rightarrow t\in\{2;8\}\Rightarrow x\in\{1;3\}$.

4. $C_x^2=\frac{x(x-1)}{2}, A_x^2=x(x-1), x\geq 2$, $\frac{x(x-1)}{2}+x(x-1)=30\Rightarrow x=5$.

5. $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j},\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}}$, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{-3}{5}$.

6. $\text{ctg}\, x=3\Rightarrow \text{tg}\, x=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{tg}\, 2x=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $2(a-bi)+a+bi=3+4i \Rightarrow z=1-4i$.

2. $s\left(s^2-3p\right)=-18$.

3. $5^x=t>0 \Rightarrow 1+t-2t^2=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=0$.

4. $T_{k+1}=C_9^k\left(a^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^k, 2(9-k)-\frac{k}{3}=4 \Rightarrow k=6 \Rightarrow T_7$.

5. $\vec{u}^2-\vec{v}^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right), \left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)=3\cdot 2+2\cdot 3=12$.

6. $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=13 \Rightarrow R=\frac{BC}{2}=\frac{13}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}-\sqrt{3}=2\in\mathbb{N}$.

2. $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}, x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$\Rightarrow\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3. $x>0,\ \log_2(4x)=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$, $\log_2 x=t$, $t^2+t-2=0\Rightarrow t\in\{1\ ;\ -2\}$; $x\in\left\{2\ ;\ \frac{1}{4}\right\}$.

4. $T_{k+1}=C_{200}^{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{200-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{k}$, $k\in\{0;1;2;...;200\}$, $\frac{200-k}{3}-\frac{k}{2}=0\Rightarrow k=80\Rightarrow T_{81}=C_{200}^{80}\cdot 2^{80}$.

5. $m=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}\Rightarrow\ y-1=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow\ x-2y=0$.

6. $m_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2=12$, $m_a=\sqrt{7}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $z=\frac{1+4i}{4+7i}=\frac{32+9i}{65}\Rightarrow \operatorname{Re} z=\frac{32}{65}$

2. $x_v=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x=1$.

3. $3^x=t, t>0$, $3t+\frac{3}{t}=10\Rightarrow t\in\left\{\frac{1}{3};3\right\}\Rightarrow x\in\{-1;1\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este $2010:2=1005$. Numărul cazurilor favorabile = 335, deci $p=\frac{335}{1005}=\frac{1}{3}$.

5. $m_d=-2\Rightarrow m=-\frac{1}{-2}$, $y-2=\frac{1}{2}(x-3)\Rightarrow x-2y+1=0$.

6. M mijlocul lui $[BC]$. $GM=\frac{1}{3}AM$, AM este înălțime $AM^2=AB^2-BM^2\Rightarrow AM=4$.

Deci $GM=\frac{4}{3}$.

Soluție

1. $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2$.

2. $x<3\Rightarrow -x+3-x+4=1\Rightarrow x\in\varnothing$, $x\in[3,4)\Rightarrow x-3-x+4=1\Rightarrow x\in[3,4)$,
$x\geq 4\Rightarrow x-3+x-4=1\Rightarrow x=4$. Deci $x\in[3,4]$.

3. $\log_3 x=t$, $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Rightarrow t\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{9;\sqrt{3}\right\}$

4. Numărul cazurilor posibile $2010:2=1005$. Numărul cazurilor favorabile 251. $p=\frac{251}{1005}$.

5. $\sqrt{(m-2)^2+(-2-m)^2}=4$. $m\in\{-2;2\}$.

6. $\operatorname{ctg} x=6\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}=6\Rightarrow\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=36\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{37}$.

Soluție

1. $1+3+3^2+...+3^8=\dfrac{3^9-1}{3-1}=\dfrac{3^9-1}{2}\Rightarrow 2\dfrac{3^9-1}{2}=3^9-1<3^9$.

2. $x_1^3+x_2^3=s\left(s^2-3p\right)$, $s=-5, p=-7\Rightarrow x_1^3+x_2^3=-5\left(25-3(-7)\right)=-230\in\mathbb{Z}$.

3. $\log_5 x=t$, $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow t\in\left\{2;\dfrac{1}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{25;\sqrt{5}\right\}$.

4. $2x-3\geq 2$, $\dfrac{(2x-3)(2x-4)}{2}=3\Rightarrow x=3$. $C_3^2=3$.Deci $x=3$.

5. $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ este mijlocul segmentului *AB*. $m_{AB}=1\Rightarrow m_d=-1$, *d* fiind mediatoarea segmentului *AB*, deci

$d:y-\dfrac{1}{2}=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow d:x+y=0$.

6. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)\Rightarrow\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)=\dfrac{5}{6}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $2(1-x)=x+1+4 \Rightarrow x=-1$

2. $f(0)=-6$, $f(x)=0 \Rightarrow x\in\{1;-6\} \Rightarrow A(0;-6), B(1;0), C(-6;0)$

3. $\sin x=-\frac{1}{2}$, $x\in\left\{(-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$,dar $x\in[0,2\pi] \Rightarrow x\in\left\{\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este 2^6. Numărul cazurilor favorabile este $C_6^2=15$. $p=\frac{15}{64}$.

5. $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{r_C}=6\vec{i}+6\vec{j}$.

6. $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})=4\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2-\vec{u}\vec{v}=3\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2$,

$3\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=3\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1+2\cdot2^2$, $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})=9$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $6^2 = x(x-5) \Rightarrow x = 9$.
2. $f(-1) = -2 \Rightarrow f(2\cdot(-2)) = 10 \Rightarrow f(2\cdot(f(-1))) = 10$.
3. $2x + \dfrac{\pi}{2} = x - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pi(2k-1), k \in \mathbb{Z}$ sau $2x + \dfrac{\pi}{2} = -x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
   În final , $x \in \left\{\pi(2k-1) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. $C_{2n}^{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow (n!)^2$ divide $(2n)!$.
5. $2x_M = x_A + x_N, 2x_N = x_B + x_M \Rightarrow x_M = 4, x_N = 5;$
   $2y_M = y_A + y_N, 2y_N = y_B + y_M \Rightarrow y_M = 3, y_N = 4$, deci $M(4\,;\,3)$, $N(5\,;\,4)$.
6. $-1 < \dfrac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} < 0, a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = 2$. Doar pentru $a = 2$ se obține triunghi .

Soluție

1. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{4(n+1)}{n+4}-\dfrac{4n}{n+3}=\dfrac{12}{(n+3)(n+4)}\Rightarrow a_{n+1}-a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ șirul este crescător .

2. $x^2+x+1=-x^2-2x+6\Rightarrow 2x^2+3x-5=0\Rightarrow x\in\left\{-\dfrac{5}{2},1\right\}\Rightarrow A\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{19}{4}\right),\ B(1,3)$.

3. $x-\dfrac{\pi}{4}=3x+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\dfrac{4k-1}{4}\pi,k\in\mathbb{Z}$, $x-\dfrac{\pi}{4}=-3x-\dfrac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\dfrac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbb{Z}$.
În final , $x\in\left\{\dfrac{4k-1}{4}\pi \mid\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{2k+1}{4}\pi \mid\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $2^n=32\Rightarrow n=5$, $T_4=C_5^3\left(2x^2\right)^2(-5y)^3\Rightarrow T_4=-5000x^4y^3$.

5. $d_1\cap d_2\neq\varnothing\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}\neq\dfrac{3}{1}\Leftrightarrow m\neq 6$.

6. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow AC\perp BD\Rightarrow\ AB^2=OB^2+OA^2$, $CD^2=OD^2+OC^2$,
$AD^2=OD^2+OA^2$, $BC^2=OC^2+OB^2\Rightarrow\ AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

Soluție

1. $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n$, $a_{n+1} - a_n = 2n$,
$a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)_{n \in N^*}$ este strict monoton .

2. $f(x) = (x+1)^2, (f \circ g)(x) = (x - 2009 + 1)^2 = (x - 2008)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,deci $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Cum $x \in (0,\pi) \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$.

4. $x \geq 3,\ C_x^{x-1} = C_x^1 = x, C_{x-1}^{x-3} = C_{x-1}^2 = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$, $x^2 - x - 16 \leq 0 \Rightarrow x \in \{3;4\}$.

5. $\frac{m}{m+2} = \frac{m+2}{4m} \neq \frac{-1}{-8} \Rightarrow m \in \left\{2; -\frac{2}{3}\right\}$.

6. $tgC = tg(\pi - (A+B)) = -tg(A+B), tg(A+B) = \frac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} \Rightarrow tgC = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Rația este : $17-13=4$. $a_2=a_3-4=9 \Rightarrow a_1=a_2-4=5$.

2. $f(-x)=(-x)^3+2\sin(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ funcția f este impară .

3. $tgx=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este 900 . $a+b+c=2 \Rightarrow \overline{abc}\in\{110;101;200\} \Rightarrow p=\frac{1}{300}$.

5. $-\frac{m}{3}\cdot\left(-\frac{12}{2}\right)=-1 \Rightarrow m=\frac{-1}{2}$.

6. $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $(2+i)(3-2i)=8-i$, $(1-2i)(2-i)=-5i \Rightarrow 8+4i$.

2. $f(x)=3x-[3x]$,

$$f(x+\frac{1}{3})=\left\{3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}=\{3x+1\}=3x+1-[3x+1]=3x+1-[3x]-1=3x-[3x]=\{3x\}=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției f .

3. $x=\pi$ verifică ecuația. $tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, t=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$.

4. $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}=\frac{20!}{10!10!}\cdot\frac{9!11!}{20!}=\frac{11}{10}$.

5. $m+4=2+2, n+5=3+2 \Rightarrow (m,n)=(0;0)$.

6. $\frac{\sin x}{\cos x}=4 \Rightarrow \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=16 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{17}$.

Soluție

1. ${b_3}^2 = 6\cdot 24 \Rightarrow b_3 = 12\ q = \dfrac{b_3}{b_2} = 2 \Rightarrow\ b_1 = 3$.

2. $3 - m^2 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

3. $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{3\pi}{3} = 0, \sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{2\pi}{3} + \sin\dfrac{3\pi}{3} + \sin\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Numărul cazurilor posibile este: 3^3. Numărul cazurilor favorabile este $3! = 6 \Rightarrow p = \dfrac{2}{9}$.

5. $\dfrac{GP}{AB} = \dfrac{1}{3}, \overrightarrow{GP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$.

6. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \dfrac{-7}{9}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\frac{25(4-3i)}{25}+\frac{25(4+3i)}{25}=8$.

2. $m^2-2<0 \Rightarrow m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

3. $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow arctg\frac{x}{3}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\sqrt{3}$.

4. Numărul cazurilor posibile este : $90:2=45$. Numărul cazurilor favorabile se obține din $4\cdot 3, 4\cdot 4, ..., 4\cdot 24$, adică 22. $p=\frac{22}{45}$.

5. $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$ şi $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$.

6. $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

.

Soluție

1. $\bar{z}+7i=6z, z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$, $\bar{z}=x-yi, x-yi+7i=6(x+yi)\Rightarrow x=0, y=1\Rightarrow z=i$.

2. $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)=\frac{(3+101)50}{2}=2600.$

3. Dacă f ar fi surjectivă , atunci ar exista $x_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x_0)=0$. $3x_0+1=0\Rightarrow x_0=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{N}$.

Deci f nu e surjectivă $\Rightarrow$ f nu este bijectivă $\Rightarrow$ f nu este inversabilă.

4. $x!(x+1-1)\le 100\Rightarrow x!\cdot x\le 100$, $0!\cdot 0, 1!\cdot 1, 2!\cdot 2, 3!\cdot 3, 4!\cdot 4\le 100$, $x!\cdot x>100, \forall x>4$, $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

5. Punctul lor de intersecție este $M(0,1)\in Oy$ .Punctele $A(-1,-1)\in d_1, B(1,-1)\in d_2$ sunt simetrice față de Oy , deci dreptele sunt simetrice față de Oy .

6. $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $(1+i)^{20}=\left[(1+i)^2\right]^{10}=(2i)^{10}=-1024$.
2. $f\left(f(x)\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$, $(-10)+(-9)+...+(-1)+1+...+10=0$.
3. Funcția este strict crescătoare, fiind compunere de funcții strict crescătoare, deci funcția f este injectivă.
4. $\dfrac{5!}{2!}-6\cdot\dfrac{5!}{3!2!}=0$.
5. $\dfrac{\left|3m-4(m+1)-1\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1\Rightarrow m\in\{-10;0\}$.
6. $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin 45^\circ\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluție

1. $\log_7 2009 - \log_7 287 - 1 = \log_7 \frac{2009}{287} - 1 = \log_7 7 - 1 = 0$.

2. $f(-x) = (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2}$, $(-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} = x^2 - \frac{1}{x^2}$, $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ funcția f este pară.

3. $x \neq 0 \Rightarrow x^4 > 0 \Rightarrow 3 - x^4 < 3,\ f(0) = 3 \Rightarrow f(x) \leq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$, deci valoarea maximă este $f(0)$.

4. $3n + 2\frac{n(n-1)}{2} = 8 \Rightarrow n = 2$.

5. $\frac{A'C}{A'B} = 2, \frac{C'B}{C'A} = \frac{1}{3}, \frac{B'A}{B'C} = \frac{3}{2}$, $\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B'A}{B'C} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow AA', BB'$ și CC' sunt concurente .

6. $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, ecuația este $y = 2$.

Soluție

1. $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}=\cos\frac{100\pi}{4}+i\sin\frac{100\pi}{4}=-1\in\mathbb{R}$.
2. $f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{-x}$, $(-x)^3-\frac{1}{-x}=-x^3+\frac{1}{x}=-\left(x^3-\frac{1}{x}\right)$, $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow f$ impară.
3. $x_v=\frac{1}{2}\notin[1\ ;\ 4]$, $f(1)=0$, $f(4)=12\Rightarrow f([1,4])=[0,12]\Rightarrow A=[0,12]$.
4. $(5-4)^{2009}=1$.
5. $m_d=-\frac{4}{-2}\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$, $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x+2y-5=0$.
6. $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{\sin 90^\circ+\sin 60^\circ}{2}$, $\sin 90^\circ=1, \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $|5-12i|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$, $|12+5i|=\sqrt{12^2+5^2}=13$, $|5-12i|-|12+5i|=0$.
2. $f(1)=0$, $f(0)=0$, $(f\circ f\circ f\circ f)(1)=0$.
3. $2^x=t>0\Leftrightarrow t^2+t-20=0\Rightarrow t\in\{-5,4\}\Rightarrow x=2$
4. Numărul cazurilor posibile este 403. Dintre acestea divizibile cu 25 sunt 81. Deci $p=\dfrac{81}{403}$.
5. Direcția bisectoarei este dată de $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{bc}$.

   Deci $\overrightarrow{AD}=bc\vec{u}\Rightarrow$ semidreapta [AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.
6. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, $\cos^2\alpha=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție

1. $z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{7}}{2}, z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{2}$.
2. Fie g prelungirea funcției f în punctul $x_0 = 0$. Condiția este $g(0) = -2m + 2 \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty; 1]$.
3. $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 2)$. $\sqrt{2-x} = \sqrt[3]{x-2}$. Notăm $\sqrt[6]{2-x} = t \geq 0 \Rightarrow t^3 = t^2 \Rightarrow t \in \{0;1\} \Rightarrow x \in \{1;2\}$.
4. Ambii membri sunt egali cu $\dfrac{(a+b)!}{a!b!}$.
5. $\dfrac{2m-2}{1-m-4} = \dfrac{3-2}{3-4} \Rightarrow m = 5$.
6. $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sin\alpha > 0, \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $a=-3,\ b=-4,\ c=-2$. Deci $b<a<c$.

2. $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases} \Rightarrow m^2+8m<0 \Rightarrow m\in(-8,0)$.

3. $x^2+x-2>0$. $\sqrt{x^2+x-2}=2 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x\in\{-3,2\}$, care verifică condiția de existență.

4. Numărul triunghiurilor este egal cu $4C_3^2+3C_4^2=30$.

5. Dacă D este simetricul lui A față de mijlocul lui (BC), atunci $ABDC$ este paralelogram, deci $x_A+x_D=x_B+x_C$ și $y_A+y_D=y_B+y_C$, de unde $D(-1,-7)$.

6. $A_{ABC}=2A_{AMC}=MC\cdot AM\cdot\sin150^\circ=4$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\in\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, pentru $a=-1\in\mathbb{Z}$ şi $b=1\in\mathbb{Z}$.

2. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2=7\in\mathbb{N}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. $C_{2n}^n=C_{2n-1}^n+C_{2n-1}^{n-1}=2\cdot C_{2n-1}^n$.

5. $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$, deci $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=3\sqrt{2}$.

6. Avem $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, deci $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=3$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $2a_1 + 5 \cdot 2 = 8 \;\Rightarrow\; a_1 = -1.$

2. $0 - 1 - 2 - \ldots - 9 = -45.$

3. $2^x = 8$, deci $x = 3.$

4. $24 - 6 - 6 = 12.$

5. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, de unde cerința.

6. $\frac{3}{\sqrt{7}}.$

Rezolvare

1. $7-7=0$.

2. $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. $f = x(\log_3 2 - 1)$ este funcție de grad 1, deci este injectivă.

4. $C_8^2 - 8 = 20$.

5. $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

6. $1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$, de unde cerința.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $\frac{3}{2} < \log_2 3 \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2}} < 3 \Leftrightarrow 8 < 9$ $(\mathbf{A})$.

2. 1 şi 3.

3. $x = 0$; $x = 1$.

4. $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^3} = \frac{n+1}{n-2} = 1 + \frac{3}{n-2} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{3;5\}$.

5. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

6. $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{7}$.

Rezolvare

1. Al patrulea factor este 0, deci produsul este 0.

2. $f\left(g\left(x\right)\right)=1-g\left(x\right)=-2x+2$ este descrescătoare.

3. $x\in\left[-1,1\right]$.

4. Numărul cerut este egal cu numărul funcțiilor injective. $g:\{1;2;3\}\to\{1;2;3;4;5\}$ minus numărul funcțiilor injective $h:\{2;3\}\to\{2;3;4;5\}$, adică $A_5^3-A_4^2=48$.

5. $x-2y-6=0$.

6. Ridicăm la pătrat $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\sin 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{4}$.

Rezolvare

1. 8.

2. $1 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 - 4m \Rightarrow m = \frac{3}{4}$.

3. $x = 0$.

4. 2^{15}.

5. $a = -3$.

6. $\sin 2a + \sin 2b = 2\sin(a+b)\cos(a-b) = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos(a-b) = 2\cos(a-b)$.

Rezolvare

1. $(1+i)^4=(2i)^2=-4$, deci este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

2. $x_V=2, y_V=5$, deci $x+y=7$.

3. $f(1), f(2), f(3)$ sunt distincte, deci sunt 4,5,6 -- eventual permutate. Suma este $4+5+6=15$.

4. M are 90 de elemente, cifre impare sunt 5, iar numere cu cifre impare 25. Probabilitatea e $\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$.

5. $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+3\vec{j},\ \overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$.

6. $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\frac{11}{16}$.

Rezolvare

1. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow 8 < 9$; $\sqrt[3]{3} < 2 = \log_2 4 < \log_2 5$.

2. $\Delta = 9 - 4m \le 0 \Rightarrow m \ge \frac{9}{4}$.

3. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$ ecuația devine $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Sunt 7 pătrate. Probabilitatea este $\frac{7}{49} = \frac{1}{7}$.

5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

6. $P = \text{tg}1^\circ \cdot \text{tg}2^\circ \cdot \text{tg}3^\circ \cdot ... \cdot \text{tg}89^\circ = (\text{tg}1^\circ \cdot \text{tg}89^\circ) \cdot (\text{tg}2^\circ \cdot \text{tg}88^\circ) \cdot ... \cdot (\text{tg}44^\circ \cdot \text{tg}46^\circ) \cdot \text{tg}45^\circ = 1$.

Rezolvare

1. Avem $3\left(z+\overline{z}\right)\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}$, deci $z=3z+3\overline{z}-\left(2z+3\overline{z}\right)\in\mathbb{R}$.

2. $f\left(x\right)=-\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{2}x+4$.

3. Ecuația $f\left(x\right)=y, y\in\left(1,3\right)\Rightarrow x=\frac{3-y}{y-1}\in\left(0,\infty\right)$ are soluție unică.

4. $n=8$.

5. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

6. $\cos a=\cos\left(b+\pi\right)=-\cos a$, deci $\cos a\cdot\cos b=-\cos^2 a\leq 0$.

Rezolvare

1. Fie $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$. Avem $i\left(z - \overline{z}\right) = i\left(a + bi - a + bi\right) = -2b \in \mathbb{R}$.

2. $\Delta = (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$.

3. $x = 3$ este unica soluție.

4. $T_{k+1} = C_7^k \cdot 2^k,\ k = \overline{1,6}$ se divid cu 2 si 7, deci cu 14; iar primul si ultimul termen nu. Sunt 6 termeni.

5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 2 \cdot 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = 2$.

6. $\sin 2a - \sin 2b = 2\sin\left(a-b\right)\cos\left(a+b\right) = 2\sin\left(a-b\right)\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Prin calcul obținem $-\frac{8}{5}$.

2. Avem $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{ab}-2=\frac{21}{2}$.

3. Cum $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$ ecuația este verificată de orice $x\in\mathbb{R}$.

4. Sunt 4 elemente în A și 3 multipli de 7.

5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$, deci modulul este $2AC=6\sqrt{5}$.

6. $\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cos3^\circ+...+\cos179^\circ=$

$\left(\cos1^\circ+\cos179^\circ\right)+\left(\cos2^\circ+\cos178^\circ\right)+...+\left(\cos89^\circ+\cos91^\circ\right)+\cos90^\circ=0$

Rezolvare

1. $1+z+z^2=\frac{1-z^3}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0.$

2. $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}.$

3. Observăm că $\forall y\in(2,\infty)$, $\exists!\ x\in(1,\infty), x=\sqrt{y+1}$ astfel ca $f(x)=y.$

4. Avem 4 numere divizibile cu 24, anume 24, 48, 72, 96.

5. $\frac{a}{3}=\frac{a+1}{5}\Rightarrow a=\frac{3}{2}.$

6. Semiperimetrul și aria sunt $p=\frac{15}{2}$, $S=\frac{15\sqrt{3}}{4}\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Soluție

1. $a=\lg\frac{2}{20}=\lg\frac{1}{10}=-1,\ b=-C_3^1=-3,\ c=-\sqrt[3]{4\cdot 2}=-2\Rightarrow b<c<a$.

2. $V(-1;a-1)$. Rezultă $a=0$ sau $a=2$.

3. $\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Rightarrow x\cdot y=1$

4. $A_n^3=6C_n^3=n(n-1)(n-2)\Rightarrow 3\mid A_n^3$.

5. Avem $EGFH$ paralelogram, pentru că $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\Rightarrow\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{CA}$.

6. Cum $2x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\Rightarrow\cos 2x<0$. Deci $\cos 2x=-\sqrt{1-\sin^2 2x}=-\frac{4}{5}\Rightarrow\operatorname{tg} x=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=-3$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $z = -\frac{3}{7}i.$

2. $x = 5$ şi $x = -1.$

3. Ecuația $f(x) = y \Leftrightarrow 4yx^2 - x + y = 0$ are soluții reale dacă şi numai dacă $y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$

4. Sunt $C_4^3 = 4$ funcții strict crescătoare şi tot 4 strict descrescătoare. În total sunt 8 funcții strict monotone.

5. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, evident.

6. $\sin 2a - \sin 2b = 2\sin(a-b)\cos(a+b) = \sin(a-b),$ de unde cerința.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $150=\frac{2a_1+9\cdot 3}{2}\cdot 10 \Rightarrow a_1=\frac{3}{2}.$

2. Notând $s=a+b, p=ab$ avem $s^2-2p=1,\ s=2,$ de unde $s=2,\ p=1$ şi $a=b=1\Rightarrow (a,b)=(1,1).$

3. Avem $x\in\left(0,\frac{9}{2}\right)$ iar ecuația se scrie $x(9-2x)=10.$ Obținem soluțiile $x=2$ şi $x=2,5.$

4. Sunt 100 de numere in multimea M si 14 multiplii cu 7; probabilitatea este $\frac{86}{100}=\frac{43}{50}$.

5. $y=-2x+2.$

6. Este partea reală a sumei rădăcinilor de ordin 5 ale unității. Alternativ, înmulțim suma cu $\sin\frac{\pi}{5}.$

Rezolvare

1. $|z| = \left|\sqrt{2}-1+i\left(\sqrt{2}+1\right)\right|^2 = 6.$

2. $(1-2y)^2 - 6y^2 = 1 \Rightarrow -4y - 2y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ sau $y = -2.$ Obținem $x = 1, y = 0$ şi $x = 5, y = -2.$

3. De exemplu, $f(0) = 1 = f(-1).$

4. $C_{10}^3 - C_9^3 = C_9^2 = 36$.

5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB},$ deci $AC = BD,$ de unde cerința.

6. $\sin 40^\circ \cdot \sin\left(180^\circ - 140^\circ\right) = \sin^2 40^\circ = \cos^2 50^\circ = \cos^2 130^\circ$.

Rezolvare

1. Fie q rația progresiei. Avem $a\left(q^3-1\right)=7,\ aq\left(q-1\right)=2,$ de unde $q=2.$

2. $mx^2+x-2\le 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m<0$ și $\Delta=1+8m\le 0.$ Rezultă $m\le -\frac{1}{8}.$

3. $2x+\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{12}-(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cap(0,5)=\{\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\}.$

4. $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8=C_{10}^0+\left(C_{10}^2-C_{10}^8\right)-\left(C_{10}^6-C_{10}^4\right)=1-0-0=1.$

5. $0=\vec{u}\cdot\vec{v}=a^2-1+2a+2\Rightarrow a=-1.$

6. $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\sin 2\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $z=1\pm\sqrt{3}i \Rightarrow |z|=2.$

2. $f(x)=ax+b,\ a>0 \Rightarrow f(f(x))=a^2x+ab+b \Rightarrow a=2,\ b=1.$

3. $x=2.$

4. $\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}.$

5. Dreapta AB are ecuatia $x-y+1=0.$ Distanta este $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6. Avem $\sin\alpha=0$ sau $\cos\alpha=1,$ deci $x=\pi.$

Rezolvare

1. $(1+i)^4=-4.$

2. $f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x).$

3. $5^x+5^{-x}=2\Leftrightarrow\left(5^x-1\right)^2=0\Rightarrow x=0.$

4. Sunt 4 cifre prime, anume 2,3,5,7, deci sunt 400 de numere cu proprietatea cerută. Probabilitatea este $\frac{4}{9}$.

5. Punctele B,C,O sunt coliniare și O este mijlocul segmentului BC. Rezultă că BC este diametru al cercului circumscris, deci $A=90^\circ$.

6. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1\Rightarrow\sin 2\alpha=0\Rightarrow \text{tg } 2\alpha=0.$

Rezolvare

1. $\frac{10}{\sqrt{2}-1}=10\left(\sqrt{2}+1\right)\in(24;25)$, deci partea întreagă este 24.

2. Ecuația se scrie $1=(1-x)|1+x|$. Obținem $x=0$ și $x=-\sqrt{2}$.

3. Funcțiile $g,h:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2009^x, g(x)=\log_{2009}x,$ sunt strict crescătoare, deci funcția $f=g+h$ este strict crescătoare.

4. Numărul numerelor $\overline{abc}$ cu $a\cdot b\cdot c$ impar $\Leftrightarrow a,b,c\in\{1,3,5,7,9\}$ este $5^3=125$, deci $p=\frac{5}{36}$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=3+3a+a^2>0,\forall a\in\mathbb{R}.$

6. $\sin x+\sin 5x=2\cos 2x\cdot\sin 3x,$ de unde cerința.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $b^2 = ac.$ Dacă prin absurd nu toate numerele sunt pare, din $a+b+c$ par rezultă că un număr este par şi două impare. Atunci unul din membrii relației $b^2 = ac$ este par şi celălalt par, fals.

2. $f(a)+f(a+1)=2(a+2)^2 \geq 0.$

3. $\log_2 x+\log_4 x=\frac{3}{2}\log_2 x>3 \Rightarrow x>4.$

4. $C_n^1+C_n^2=120 \Rightarrow n(n+1)=240 \Rightarrow n=15.$

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2-a<0 \Leftrightarrow a>2.$

6. Avem $B=90^\circ, A=30^\circ,$ deci $BA=4\sqrt{3}$ şi aria triunghiului este $8\sqrt{3}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $\sqrt[3]{100} < \sqrt[3]{125} = 5 = \log_2 32 < 3! = 6$.

2. Privind ca trinom în x avem $\Delta = 9y^2 - 12y^2 = -3y^2 \le 0$, de unde cerința.

3. $\sin 2x = \cos x \Rightarrow \cos x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. $A_5^3 - 4 \cdot C_6^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 0$.

5. $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow C(3,7)$.

6. $\sin A = \frac{4}{5} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{8}{\frac{8}{5}} = 5$.

Rezolvare

1. Avem $a+bi+2a-2bi=3+i \Rightarrow a=1, b=-1 \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$.

2. $x^2-3=0$.

3. $\log_x 2+\log_{\sqrt{x}} 2=9 \Rightarrow 3\log_x 2=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$.

4. Sunt $C_5^3=10$ submulțimi cu 3 elemente ale lui A, iar singura fără elemente pare este $\{1,3,5\}$; rămân 9 submulțimi.

5. $a=b=-1$.

6. $\cos a=-\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} a=-\frac{3}{4}$.

Rezolvare

1. Avem $n=\sqrt{3}+\sqrt{2}\in(3,4)\Rightarrow[n]=3$.

2. f este funcție strict monotonă, iar compunerea a două funcții de aceeași monotonie este strict crescătoare.

3. $3^x=t>0\Rightarrow 9t^2+9t-4=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-1$.

4. Exact două valori ale funcției sunt 1, celelalte fiind 0, deci sunt $C_{10}^2=45$ de funcții.

5. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)\left(2\vec{i}+(m-2)\vec{j}\right)=3m-4\Rightarrow m=3$.

6. Funcția cos este descrescătoare pe intervalul $[0,\pi]$, deci cel mai mare este cos 1.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $a = 2; b = 1$.
2. $x = 0$.
3. $|x-1| = 3 - x \Rightarrow x = 2$.
4. Fiecare termen se divide cu 11.
5. $C(3,9)$.
6. $\sin^2 a = \dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \dfrac{4}{29} \Rightarrow |\sin a| = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$.

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Din ipoteză rezultă $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X$, iar din **a)**, că există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Folosind **b)** găsim $\begin{cases} \dfrac{(u+v)^3 + (u-v)^3}{2} = 2 \\ \dfrac{(u+v)^3 - (u-v)^3}{2} = 1 \end{cases}$ și soluția: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \end{pmatrix}$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Calcul direct, $-\widehat{16} = \hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$.

c) Pentru $a \in \mathbb{Z}_7$, $a \neq \hat{0}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{6} + a \cdot x$. Avem $f\left(a^{-1}\right) = \hat{0}$, deci f este reductibil.

Pentru $a = \hat{0}$, $f = \left(X^3 + \hat{4}\right) \cdot \left(X^3 + \hat{3}\right)$, deci f este reductibil.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul. Se obține $a = 3$.

b) $B = A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se obține $B^{2009} = B$.

c) $\det(X) = 0 \Rightarrow X^5 = t^4 \cdot X$, unde $t = trX$. Deci $t^5 = 3,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow t = \sqrt[5]{3}$ şi $X = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^4}} A$, care verifică.

2. a) Pentru $a, b \in M$, avem $e^a + e^b - 1 \geq 1$, deci $a * b \in [0, \infty) = M$.

b) Pentru $a, b, c \in M$ se demonstrează că $(a * b) * c = a * (b * c) = \ln\left(e^a + e^b + e^c - 2\right)$.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{de\ n\ ori\ a} = \ln\left(n \cdot e^a - (n-1)\right)$.

Se obțin apoi soluțiile $a = 0$ şi $a = \ln(n-1)$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluții

1. a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3$.

b) Cum $A(A - I_3) = (A - I_3)A = 2I_3$ rezultă că $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

c) $A^2 + A = 2(A + I_2) \Rightarrow A^3 + A^2 = 2^2(A + I_3)$. Prin inducție rezultă concluzia.

2. a) Se foloseşte definiția elementului neutru.

b) Deoarece $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 1 \end{cases}$, obținem $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ şi se verifică apoi faptul că funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 3$ este izomorfismul căutat.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = (x-3)^{2009} + 3$.

Se obțin apoi soluția $x = 5$.

Soluție

1. a) Se arată că $rang\,(A)=2$.

b) Calcul direct, sau, deoarece $rang\,(A^t \cdot A) \le rang\,(A)=2$, rezultă că $\det(A^t \cdot A)=0$.

c) De exemplu $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $4 \circ 5 \circ 6 = 9$.

b) Se demonstrează că funcția f este bijectivă şi $\forall\, x, y \in (0, \infty)$, $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$.

c) Fie $q \in \mathbb{Q}$, $q > 3$. Atunci, există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $q = 3 + \frac{m}{n}$.

$\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, avem $k = 3 + t \in H$ şi deoarece H este subgrup al lui G, rezultă că şi simetricul $k' = \frac{1}{t} + 3 \in H$.

Deci $m+3, \frac{1}{n}+3 \in H$, de unde şi $(m+3) \circ \left(\frac{1}{n}+3\right) = \frac{m}{n} + 3 = q \in H$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se arată că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0$, deci punctele A, B, C sunt coliniare.

b) Între linii există relația $L_3 = 6L_1 - 2L_2$. Rangul este 2.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(M) \geq 2$.

Dacă unul dintre minorii de ordinul trei ai lui M care conțin ultima coloană este nul, atunci punctul $D(a,b)$ este coliniar cu două dintre punctele A, B și C.
Din a) rezultă că punctele A, B, C, D sunt coliniare, deci toți ceilalți minori de ordinul 3 ai matricei M sunt nuli. Așadar $\operatorname{rang}(M) = 2$.

2. a) Se verifică prin calcul.
b) Se arată că elementul neutru este $e = -1$.
Dacă $x \in \mathbb{Z}$, evident $5x + 6 \neq 0$.
x este simetrizabil $\Leftrightarrow$ $\exists\, x' \in \mathbb{Z}$, $xx' = x'x = -1$ $\Leftrightarrow$ $x' = -\dfrac{6x+7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$, deci $5x' = -6 + \dfrac{1}{5x+6} \in \mathbb{Z}$,
așadar $5x + 6 \in \{-1, 1\}$. Se obține că unicul element simetrizabil în raport cu legea “$*$” este elementul neutru $e = -1$.
c) Din ecuație rezultă că x este inversabil și din b) rezultă $x = -1$, care verifică relația.

Soluție

1. a) Deoarece $\sigma^6 = e$, rezultă că $\sigma^{2009} = \sigma^5 = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Alegem, de exemplu, $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Obținem

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (sau alegem $\tau = \sigma^2$).

c) Cum $\tau^1, \tau^2, ..., \tau^{121} \in S_5$, $\exists q \geq r$ cu $\tau^q = \tau^r$. Luăm $p = q - r$.

2. a) Se arată că soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{ 1, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

b) Utilizând relațiile lui Viète obținem $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.
Dacă ecuația ar avea mai mult de o rădăcină reală, deoarece ea are coeficienți reali, ea ar avea toate rădăcinile reale. Deoarece $S = 0$, obținem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, fals.

c) Utilizând relațiile lui Viète, obținem $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3)\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right) = -4$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) Se arată că $\operatorname{rang}(A)=3$.

b) Se arată ușor că mulțimea soluțiilor este $S=\{(0,\alpha,1-2\alpha,\alpha)\mid \alpha\in\mathbb{C}\}$.

c) Presupunem că sistemul are soluția $X=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$. Se obține sistemul $\begin{cases}x=0\\2x+y=0\\3x+2y+z=0\\4x+3y+2z=1\end{cases}$.

Sistemul omogen format din primele trei ecuații are doar soluția $x=y=z=0$, care nu verifică a patra ecuație a sistemului, contradicție.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Din a) rezultă că „$\cdot$" este lege de compoziție pe H_t.

Deoarece pentru $t\in\mathbb{Z}$, simetrica din grupul $(G,\cdot)$ a matricei $A(k\cdot t-1)$ este matricea $A(-k\cdot t-1)$, rezultă că $A(h\cdot t-1)\cdot A(-k\cdot t-1)=A((h-k)t-1)\in H_t$, $\forall h,k\in\mathbb{Z}$.

c) Fie funcția $f:G\to\mathbb{Z}$, $f(A(k))=k+1$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Se demonstrează că f este bijectivă şi că este un morfism de grupuri.

Soluții

1. a) $\det(A) = -4$.

b) Pentru $n = 1$, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A + 2I_3$, deci $P(1)$ este adevărată.

Dacă $P(n)$ este adevărată atunci

$$A^{2(n+1)} = A^{2n} \cdot A^2 = \left(\frac{2^{2n}-1}{3} A + \frac{2^{2n}+2}{3} I_3 \right)(A + 2I_3) = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} A + \frac{2^{2(n+1)}+2}{3} I_3.$$

c) Se arată că $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$ deci $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) = -(-x_1-1)(-x_2-1)(-x_3-1) = -P(-1) = -a$ sau se folosesc relațiile lui Viète.

b) $x_1 = 2 \Rightarrow a = -6$. Celelalte rădăcini sunt soluțiile ecuației $x^2 + 2x + 3 = 0$, deci $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i$.

c) $a = 0$ este soluție.

Pentru $a \neq 0$, din primele două relații ale lui Viète rezultă $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2) \cdot x_3 = -1 \end{cases}$.

Se obține $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0$. Din $\Delta_{x_1} \geq 0$ și $x_2 \neq 0$ rezultă $x_2^2 = 1$.

Rezultă $x_3 = 0$, fals. Așadar $a = 0$ este unica soluție.

Soluție

1. a) $\begin{vmatrix} x_A & 2x_A & 1 \\ x_B & 2x_B & 1 \\ x_C & 2x_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

b) $\det(M) = \pm 2S_{ABC} = \pm 1$.

c) Fie $M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Din $M^{-1} \cdot M = I_3$, rezultă $a_1 + b_1 + c_1 = 0$, $a_2 + b_2 + c_2 = 0$, $a_3 + b_3 + c_3 = 1$, de unde concluzia.

2. a) $X = \begin{pmatrix} m & n \\ -3n & m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} p & q \\ -3q & p \end{pmatrix} \Rightarrow X + Y = \begin{pmatrix} u & v \\ -3v & u \end{pmatrix}$, cu $u = m + p \in \mathbb{Z}, v = n + q \in \mathbb{Z}$.

b) $XY = O_2 \Rightarrow \det(X) \cdot \det(Y) = 0$ deci, luând X, Y ca mai sus, $m^2 + 3n^2 = 0$ sau $p^2 + 3q^2 = 0$, de unde $m = n = 0$ sau $p = q = 0$.

c) Unitatea inelului este I_2. Dacă $X, Y \in A$ și $XY = I_2$, atunci $\det(X) \cdot \det(Y) = 1$ și $\det(X), \det(Y) \in \mathbb{Z}$, deci $\det(X) = \pm 1$. Rezultă $X = \pm I_2$; aceste două elemente sunt inversabile în inelul dat.

Soluție

1. a) Se arată că $\alpha^3 = e$.

b) Deoarece $\alpha^3 = e$ rezultă că $\alpha^{2009} = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuația devine $\alpha^2 \cdot x = e$, cu unica soluție

$x = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha$.

c) Fie $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ o ordonare oarecare a factorilor.

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_3) \cdot \varepsilon(\sigma_4) \cdot \varepsilon(\sigma_5) \cdot \varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1)+m(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)} = -1$.

2. a) $z = \sqrt{2}(1+i)$.

b) Dacă $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ este inversabil, atunci $a^2 + b^2 = 1$, deci $a = \pm 1$ și $b = 0$ sau $a = 0$ și $b = \pm 1$.
Rezultă că $z \in \{\pm 1; \pm i\}$. Cum ± 1 și $\pm i$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}[i]$, rezultă concluzia.

c) $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ aparține lui $H \Leftrightarrow 2 / (a+b)$. Dacă $a + bi$, $c + di \in H$ rezultă
$(a+bi)(c+di) \in H$ deoarece $2 / c(a+b) + d(a-b)$.

Soluție

1. a) $\det(A)=4$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) $A\neq 0_4 \iff$ cel puțin unul dintre numerele $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ este nenul $\iff$

$\iff \alpha=a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$. Folosind unicitatea inversei, deducem că $A^{-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot A^t$.

2. a) $|a|=|-a|=|x_1+x_2+x_3|\le|x_1|+|x_2|+|x_3|\le 3$.

b) $f(0)=c<0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

Funcția polinomială asociată lui f este continuă pe $[0,\infty)$, deci ea (şi polinomul f) are cel puțin o rădăcină în $(0,\infty)$.

c) $x_1x_2x_3=1$, de unde rezultă $|x_1|=|x_2|=|x_3|=1$.

Deoarece $c=-1<0$, din punctul **b)** rezultă că f are rădăcina $x_1\in(0,\infty)$.

Cum $|x_1|=1$, obținem $x_1=1$.

Folosind relațiile lui Viète, obținem $x_2=x_3=-1$ şi apoi $b=-1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.
b) Se demonstrează prin calcul direct, ținând cont de faptul că
$\forall\, k \in \{1, 2\}$, $x_k \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^3 + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k = a + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k$ și
$x_k^2 \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^4 + b \cdot x_k^3 + c \cdot x_k^2 = a \cdot x_k + b + c \cdot x_k^2$.
c) Din **b)** se obține $\det(A) = g(1) \cdot g(x_1) \cdot g(x_2)$.
$\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre numerele $1, x_1, x_2$ este rădăcină și pentru g.
Obținem $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.
2. a) $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{0}$.
b) Cum f nu e injectivă, iar domeniul său este o mulțime finită și coincide cu codomeniul, rezultă că f nu este surjectivă.
c) Singurele rădăcini ale polinomului sunt $x_1 = \hat{0}$ și $x_2 = \hat{1}$.
Descompunerea în factori ireductibili a polinomului peste $\mathbb{Z}_5$ este $X^4 + \hat{4}X = X\left(X + \hat{4}\right)\left(X^2 + X + \hat{1}\right)$.

Soluție

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = 2 \cdot (1-m)$.

Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ sistemul este compatibil determinat.

b) Pentru $m = 1$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ și $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil.

c) Dacă $m = 1$, sistemul are mulțimea soluțiilor $S_1 = \{(x, 1, 2-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ și

$x^2 + 1^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 5$.

Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 5$ are minimul $g(x_V) = g(1) = 3$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Dacă $X, Y \in G$, $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = 1$, deci $X \cdot Y \in G$.

Se verifică că dacă $X \in G$, atunci și $X^{-1} \in G$.

c) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece $D^2 = 0_2$, obținem $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C^n = (-1)^n \cdot I_2 + n \cdot (-1)^{n-1} \cdot D \neq I_2$.

Soluții

1. a) Se arată că $rang(A) = 1$.

b) Se arată că $A^2 = d \cdot A$, cu $d = a + 2b + 3c$.

c) Se verifică că pentru $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, avem $A = K \cdot L$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Rădăcinile ecuației $t^2 - 4t + 16 = 0$ sunt $t_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i$.

Mulțimea rădăcinilor lui f este $\left\{\sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i\right\}$.

c) Singura descompunere în factori a polinomului, în $\mathbb{R}[X]$, este $f = \left(X^2 - 2\sqrt{3}X + 4\right)\left(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4\right)$.

Nici unul dintre polinoamele $X^2 - 2\sqrt{3}X + 4$ și $X^2 + 2\sqrt{3}X + 4$ nu poate fi descompus în $\mathbb{Q}[X]$.

Soluție

1. a) $\det(A)=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ sau

$\det(A)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

b) Deoarece $\det(A)=0$ şi $a+b+c\neq 0$, rezultă $a=b=c$.

c) Determinantul matricei sistemului $\begin{vmatrix}2a-1 & 2b & 2c\\ 2c & 2a-1 & 2b\\ 2b & 2c & 2a-1\end{vmatrix}$ este o sumă de 5 termeni pari şi unul impar, deci este un număr impar şi, în consecință, nenul.

2. a) Folosind relațiile lui Viéte, se obține $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$.

b) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+5=0$, cu soluțiile $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}>0$, deci ecuația inițială are toate rădăcinile reale.

c) Dacă $\operatorname{grad}(g)>4$, atunci $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=+\infty$, dar din ipoteză rezultă $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leq 1$, contradicție.

În consecință, $\operatorname{grad}(g)\leq 4$. Din ipoteză deducem că $\forall k\in\{1,2,3,4\}$, $|g(x_k)|\leq|f(x_k)|=0$, deci $|g(x_k)|=0$, de unde rezultă $g(x_k)=0$, adică $g=a\cdot f$, cu $a\in\mathbb{R}$. Înlocuind în relația din enunț, obținem că $|a|\leq 1$. Aşadar, soluțiile sunt polinoamele $g=a\cdot f$, cu $a\in[-1,1]$.

Soluție

1. a) Dacă $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a, a' \in (0, \infty)$ și $b, b' \in \mathbb{R}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} a \cdot a' & a \cdot b' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $a \cdot a' \in (0, \infty)$, $a \cdot b' + b \in \mathbb{R}$.

b) De exemplu, pentru $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se arată că $CD \neq DC$.

c) Se arată că $I_2 - A + A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\alpha = 1 - a + a^2 > 0$.

2. a) Utilizând eventual relațiile lui Viète, se obține că $a = 0$, $b = -3$ și $c = 2$.

b) Dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci $2a + c + (b+2) \cdot \sqrt{2} = 0$, de unde rezultă $b = -2$ și $c = -2a$.

Apoi, $f = X^3 + aX^2 - 2X - 2a = (X + a)(X^2 - 2)$, cu rădăcina rațională $x_1 = -a$.

c) Presupunem că f are rădăcina $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că există $q \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $f = (X - k) \cdot q$.
Mai mult, coeficienții lui q sunt numere întregi. Folosind ipoteza, obținem că numerele $(-k) \cdot q(0)$ și $(1-k) \cdot q(1)$ sunt impare, ceea ce este fals, deoarece $(-k)(1-k)$ este un număr par.

Soluție

1. a) Prin calcul direct, rezultă $A^2 - B^2 = 0_2$.

b) Se arată că $I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 = I_2 + 2\cdot\left(A + A^2\right) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Atunci, $\det\left(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4\right) = 5$.

c) Pentru $n \in \mathbb{Z}$ oarecare, fie $X_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se arată că $X_n^2 = I_2$.

2. a) Restul căutat este polinomul $r = 2X + 3$.

b) Avem $f = (X - x_1)\cdot(X - x_2)\cdot(X - x_3)\cdot(X - x_4)$, deci $(1 - x_1)\cdot(1 - x_2)\cdot(1 - x_3)\cdot(1 - x_4) = f(1) = 5$.

c) $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4) = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)(-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)(-1 - x_4)$,

deci $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4) = f(1)\cdot f(-1) = 5$.

Soluție

1. a) Prin calcul direct, obținem $A^3 = 0_3$.

b) $I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, deci $rang\left(I_3 + A + A^t\right) = 1$.

c) Se arată că $\left(I_3 + A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, sau prin calcul direct, sau observând că

$I_3 = I_3 + A^3 = (I_3 + A)\left(I_3 - A + A^2\right)$.

2. a) Se arată că mulțimea rădăcinilor lui f este $\left\{0, -4-2i, -4+2i\right\}$.

b) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -4a$ și $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 20$.

Suma din enunț este $S = 2S_1^2 - 6S_2 = 8\left(4a^2 - 15\right)$.

c) Deoarece $x_2 = x_3 = -a$, din prima relație a lui Viète obținem $x_1 = -2a$ și înlocuind în a doua relație a lui Viète rezultă $a \in \left\{-2, 2\right\}$.

Pentru $a = -2$, obținem $b = 2a^3 = -16$, iar pentru $a = 2$, obținem $b = 2a^3 = 16$.

Soluție

1. a) Scădem prima linie din celelalte şi obținem $\det(A) = -8$.

b) Scădem pe rând prima ecuație din celelalte şi obținem $y = z = t = \frac{1}{2}$ şi apoi $x = -\frac{1}{2}$.

c) Se obține $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a) Se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{S_3}{S_4} = 2$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Observăm că $x = 0$ nu este rădăcină pentru *f*. Ecuația $f(x) = 0$ este echivalentă cu ecuația $t^2 + 2t + a + 2 = 0$, unde $t = x - \frac{1}{x}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale. Ecuația $t^2 + 2t + a + 2 = 0$ are rădăcinile reale dacă şi numai dacă $a \le -1$.

Soluție

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = -120$. Se obține soluția unică $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $z = 0$.

b) Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc \neq 0$, deci sistemul are soluție unică.

c) Folosind formulele lui Cramer, obținem $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A$.

$\hat{A}$ fiind unghi al triunghiului *ABC*, avem $A \in (0, \pi)$, deci $x_0 = \cos A \in (-1, 1)$.

Analog obținem $y_0 = \cos B \in (-1, 1)$ și $z_0 = \cos C \in (-1, 1)$.

2. a) Deoarece a și b iau independent câte trei valori, există $3 \cdot 3 = 9$ matrice în mulțimea *G*.

b) Se verifică prin calcul..

c) $\det(A) = (a-b)(a+b)$. $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ fiind corp, din $(a-b)(a+b) = \hat{0}$ rezultă $a = b$ sau $a = -b$.

În total, există 5 matrice în G care au determinantul nul.

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.
b) Tripletul $(0,1,0)$ e soluție a sistemului, $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$, deci acesta este compatibil.

Dacă $a+b+c\neq 0$ și $a^2+b^2+c^2\neq ab+bc+ca$, atunci soluția precedentă este unică.
c) Din ipoteză rezultă că $a=b=c$.

Cum $a=b=c\neq 0$, rezultă $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2=z-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-x-y \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\end{cases}$.

A doua ecuație din sistem are o infinitate de soluții, care sunt coordonatele punctelor de pe cercul de centru $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ și rază $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Soluțiile sistemului sunt $\begin{cases} x_t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos t \\ y_t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin t \\ z_t=1-x_t-y_t\end{cases}$, cu $t\in[0,2\pi)$.

2. a) Deoarece a,b,c pot lua arbitrar câte 4 valori, există $4\cdot 4\cdot 4=64$ matrice în mulțimea G.

b) De exemplu, matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ are proprietățile cerute.

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\in G$. $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\hat{1} \\ b(a+c)=\hat{0} \\ c^2=\hat{0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in\{\hat{1},\hat{3}\} \\ c\in\{\hat{0},\hat{2}\}\end{cases}$, deci $a+c\in\{\hat{1},\hat{3}\}$.

Rezultă $b=\hat{0}$. Obținem patru matrice.

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Sistemul este compatibil determinat. Se obține soluția $x = \frac{c-b}{\det(A)}$, $y = \frac{a-c}{\det(A)}$, $z = \frac{b-a}{\det(A)}$.

c) Avem că rangul matricei sistemului este 2 și rangul matricei extinse este 3, de unde rezultă concluzia.

2. a) Se arată că $f(1)=1$ și $f(2)=2$ și apoi că $f(5)=5$.

b) Folosind ipoteza, se deduce că $f(a_{n+1}) = (f(a_n))^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și apoi, folosind această relație, se demonstrează prin inducție concluzia.

c) Se consideră $g \in \mathbb{R}[X]$, $g = f - X$. Din b) avem că $g(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci g este polinomul nul, așadar $f = X$.

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Fie $Y=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}\in C(A)$, cu $Y^2=0_2$. Obținem sistemul $\begin{cases} a^2+5b^2=0 \\ ab=0 \end{cases}$, cu unica soluție $a=b=0$, deci $Y=0_2$.

c) Fie $Z=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}\in C(A)$, $Z\neq O_2$, cu $a,b\in\mathbb{Q}$.

Presupunem că $\det(Z)=0$, deci $a^2-5b^2=0$. Dacă $b=0$, atunci $a=0$, deci $Z=0_2$, fals. Dacă $b\neq 0$, rezultă că $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$, fals.

2. a) $f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+f\left(\hat{2}\right)=\hat{3}a+\hat{1}=\hat{1}$.

b) $f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}$ are singura rădăcină $x=\hat{2}$.

c) Deoarece $grad\,(f)=3$, f este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3 \Leftrightarrow f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$. Așadar $a\neq\hat{0}$ și $\hat{1}+a\neq\hat{0}$, deci $a=\hat{1}$.

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(A-A^t\right)^t=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$, deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) $A-A^t\neq 0_3$, și în consecință, $\text{rang}\left(A-A^t\right)\geq 1$.

Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, atunci $A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$.

Dacă am avea $\text{rang}\left(A-A^t\right)=1$, atunci toți minorii de ordinul doi ai matricei ar fi nuli.

Obținem $b-d=h-f=c-g=0$, deci $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$, adică $A=A^t$, fals.

Aşadar $\text{rang}\left(A-A^t\right)\geq 2$ şi cum $\det\left(A-A^t\right)=0$, rezultă $\text{rang}\left(A-A^t\right)=2$.

2. a) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+4=0$, cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=4$.
Rădăcinile lui f sunt $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$.

b) $\exists\, a\in\mathbb{Q}$ astfel ca $h=a\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+1)(X-1)$. Obținem $h=4X^4-5X^2+1$.

c) Din $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$ deducem că există polinomul cu coeficienți întregi q, astfel încât $g(X)=f(X)\cdot q(X)+2$. Presupunem contrariul, deci că există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $g(n)=0$.
Obținem $(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)\cdot q(n)=-2$.
Egalitatea anterioară având loc în mulțimea $\mathbb{Z}$, divizorii întregi ai lui -2 fiind $-2,-1,1,2$, obținem că două dintre numerele $n-2, n-1, n+1, n+2$ coincid, fals.

Soluție

1. a) $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^2=1$.

b) Avem $\sigma^3=e$, unde e este permutarea identică. Evident, σ comută cu permutările e,σ,σ^2.
Se arată, prin calcul direct, că σ nu comută cu celelalte 3 permutări din S_3.

c) Dacă $x\in S_3$ este o permutare impară (deci o transpoziție), evident, $x^2=e\neq\sigma$.

Obținem unica soluție $x=\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

2. a) Se verifică prin calcul.
b) Se arată că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G. Se verifică axiomele grupului abelian. Elementul neutru este matricea $X(0)$, iar simetrica lui $X(a)\in G$ este matricea $X\left(-1+\frac{1}{a+1}\right)\in G$.

c) Se demonstrează prin inducție că
$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ X(a_1)\cdot X(a_2)\cdot...\cdot X(a_n)=X\left((a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot...\cdot(a_n+1)-1\right)$.
Pentru $n=2009$ și $a_k=k$, $\forall\, k\in\{1,2,...,2009\}$, obținem $t=2010!$

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Fie X o soluție. Din punctul **a)** deducem că $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Cum $\det\left(X^2\right) = 1 \Rightarrow \det(X) = 1$, deci există $t \in [0; 2\pi]$, $X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. $X^2 = A \Leftrightarrow \cos 2t = 0$ și $\sin 2t = 1 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$.

2. a) Folosind relațiile lui Viète, se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = a$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-1)^2 \cdot q + \alpha X + \beta$.

Din $\begin{cases} f(1) = \alpha + \beta \\ f'(1) = \alpha \end{cases}$, se obține $\begin{cases} \alpha = a + 8 \\ \beta = -7 \end{cases}$. Restul împărțirii este: $r = (a+8)X - 7$.

c) $\sum_{k=1}^{4} x_k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{9} < 0$, deci ecuația nu are toate rădăcinile reale

Soluție

1. a) $\operatorname{rang}(A+I_2)=2$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Presupunem că ecuația are soluția $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci, $A \cdot Y = Y \cdot A$ şi din **b)** deducem că există $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. Cum $\det(Y)=0$, obținem $x=0$ şi apoi $Y^2 = 0_2$, fals.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Se verifică prin calcul.

c) Se arată prin inducție că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $x_1 * x_2 * ... * x_n = (x_1+1)(x_2+1)\cdot ... \cdot(x_n+1)-1$.

Obținem $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * ... * \frac{1}{2008} * \frac{1}{2009} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{2009}{2008} \cdot \frac{2010}{2009} - 1 = 2009$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) Se arată că $\det(A - xI_2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 8\}$.
b) Se verifică prin calcul.
c) Fie $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, o soluție a ecuației. Atunci, $A \cdot Y = Y \cdot A$.

Din **b)** rezultă că există $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Obținem $\begin{cases} x^3 = 1 \\ y^3 = 8 \end{cases}$, deci există 9 soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. a) Se arată că $f_{-1,2} \circ f_{-1,2} = f_{1,0}$.
b) Se arată că operația de compunere este lege de compoziție pe G. Se verifică axiomele grupului. Se demonstrează că elementul neutru este funcția identică, $f_{1,0}$, iar pentru funcția $f_{a,b} \in G$, simetrica sa este $f_{a',b'} \in G$, unde $a' = \frac{1}{a}$ și $b' = -\frac{b}{a}$.
c) Elementele $f_{-1,-b}$ au ordin 2, $\forall b \in \mathbb{R}$.

Soluție

1. a) Se arată că $\det(A)=0 \Leftrightarrow m\in\{1,2\}$.

b) Dacă $m\notin\{1,2\}$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil

Se arată că dacă $m\in\{1,2\}$, atunci sistemul este compatibil 1-nedeterminat.

c) Dacă $m\notin\{1;2\}$, soluția unică este $(1;0;-1)$, ceea ce nu convine. Dacă $m=1$, soluțiile sunt $(1-\lambda;\lambda;-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, iar dacă $m=2$, soluțiile sunt $(1;\mu;-1-\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$. Deci $m=2$.

2. a) Dacă $x=y=\hat{0}$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$.

$\forall x\in\mathbb{Z}_3$, $x^2\in\{\hat{0},\hat{1}\}$ și dacă $x\neq\hat{0}$ sau $y\neq\hat{0}$, se arată că $x^2+y^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$.

b) Dacă $X=A(a,b)\in H$ și $Y=A(c,d)\in H$, $X\cdot Y=A\left(ac+\hat{2}bd, bc+ad\right)\in H$

Dacă $X=A(a,b)\in H$, atunci $d=a^2+b^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și $X^{-1}=A\left(ad^{-1},\hat{2}bd^{-1}\right)\in H$

c) $X^2=I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\hat{2}b^2=\hat{1} \\ ab=\hat{0} \end{cases}$.

Pentru $a=\hat{0}$ ecuația $\hat{2}b^2=\hat{1}$ nu are soluții.

Pentru $b=\hat{0}$ rezultă $\hat{a}\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și soluțiile $X_1=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}$.

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $B = A + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = A$.

c) Fie $A_1(a, f(a))$, $A_2(b, f(b))$ și $A_3(c, f(c))$ cele trei puncte, cu $a \le b \le c$.

$S[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2}|B| \overset{a)}{=} \frac{(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)}{2}$.

Cel puțin două dintre cele trei numere a, b, c au aceeași paritate, deci cel puțin unul dintre numerele $b-a, c-b, c-a$ este par. Rezultăcă $S[A_1A_2A_3] \in \mathbb{N}$. Se arată că $f(a)$, $f(b)$ și $f(c)$ sunt multipli de 3, deci B este divizibil cu 3, adică $S[A_1A_2A_3]$ este divizibilă cu 3.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Se arată că $\forall\, X(a), X(b) \in H$, cu $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}$, $a + b - 10ab \ne \frac{1}{10}$, deci $X(a)X(b) \in H$.

c) Pentru $X = X(a) \in G$, $X^2 = I_2 \iff X\left(2a - 10a^2\right) = X(0)$.

Se obțin soluțiile $X_1 = I_2$ și $X_2 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Se obține $\left(8x^3+2x\right)A(x)=O_2$ și apoi $x\in\left\{-\frac{i}{2},\frac{i}{2},0\right\}$.

c) Presupunem că ecuația are soluția $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Atunci $X^4=\left(A(0)\right)^2=O_2$.

Rezultă $\det(X)=0$ şi $X^2=t\cdot X$, unde $t=a+d$.

Se demonstrează că $X^4=t^3\cdot X$, deci $X=O_2$ sau $t=0$. În ambele cazuri rezultă $X^2=O_2$, fals.

2. a) $a_{100}=2$ şi $a_{99}=0$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q\in\mathbb{C}[X]$ şi $a,b\in\mathbb{C}$, astfel încât $f=\left(X^2-1\right)\cdot q+aX+b$. Obținem $a=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$ $b=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Cum $f(1)=f(-1)=-2^{51}$, restul împărțirii polinomului f la X^2-1 este $r=-2^{51}$.

c) Fie $z\in\mathbb{C}$ rădăcină a lui f. Atunci $(z+i)^{100}=-(z-i)^{100}$, de unde rezultă $|z+i|=|z-i|$ şi înlocuindu-l pe $z=a+b\cdot i$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ în relația precedentă, deducem $b=0$, deci $z\in\mathbb{R}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$

b) Cum sistemul este compatibil determinat rezultă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$. Deoarece $(0;0;1)$ este soluție pentru orice $a \in \mathbb{R}$, rezultă că $(0;0;1)$ este soluția unică a sistemului.

c) Sistemul este compatibil nedeterminat şi are soluția $(\alpha;\alpha;1+\alpha)$.

2. a) Pentru $a = 19 \in \mathbb{Q}$, $b = 6 \in \mathbb{Q}$, avem $a^2 - 10b^2 = 1$, deci $A = \begin{pmatrix} 19 & 10 \cdot 6 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

b) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ şi $Y = \begin{pmatrix} a' & 10b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, avem $XY = \begin{pmatrix} a'' & 10b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$, unde $a'' = a \cdot a' + 10b \cdot b' \in \mathbb{Q}$ şi $b'' = b \cdot a' + a \cdot b' \in \mathbb{Q}$ şi $\det(XY) = \det(X)\det(Y) = 1$.

c) Se arată inductiv că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 10 \cdot b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \in G$.

Cum $b_n > 0$, rezultă că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \neq I_2$ şi apoi că puterile matricei A sunt o infinitate de elemente distincte ale grupului $(G, \cdot)$.

Soluție

1. a) Se arată că $B^3 = I_3$

b) $B^{-1} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Obținem $(a+b+c)\cdot \det(A) = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)^2\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) $\hat{0}=\hat{0}^2+\hat{0}^2$, $\hat{1}=\hat{0}^2+\hat{1}^2$, $\hat{2}=\hat{1}^2+\hat{1}^2$, $\hat{3}=\hat{1}^2+\hat{3}^2$, $\hat{4}=\hat{0}^2+\hat{2}^2$, $\hat{5}=\hat{1}^2+\hat{2}^2$, $\hat{6}=\hat{2}^2+\hat{3}^2$.

c) Se arată inductiv că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left\{x^{2n} \,\middle|\, x\in\mathbb{Z}_7\right\}=H$, de unde rezultă concluzia.

Soluție

1. a) Se arată că suma elementelor matricei A este $S = 90$.
b) Se verifică prin calcul.
c) Se arată inductiv că $A^n = 32^{n-1} \cdot A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $rang\left(A^n\right) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Se verifică prin calcul.
b) $e \in \mathbb{R}$ este element neutru al legii „$*$” $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $(ae - 2) \cdot x = e - 6$ $\Leftrightarrow$ $e = 6$ şi $a = \frac{1}{3}$.
c) $6 * 6 \in [0;6] \Rightarrow 36a - 6 \in [0;6] \Rightarrow a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$.

Soluție

1. a) Dacă $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ecuația e echivalentă cu sistemul $\begin{cases}x+2y-z=2\\2x+2y=1\\x+4y-3z=5\end{cases}$. Sistemul este compatibil nedeterminat, deoarece rangul matricei sistemului este egal cu 2, ca şi rangul matricei extinse.

b) Se verifică prin calcul.

c) Se arată că $A^*=\begin{pmatrix}-6&2&2\\6&-2&-2\\6&-2&-2\end{pmatrix}$. Rezultă $rang\left(A^*\right)=1$.

2. a) $7^2-2\cdot5^2=-1$, deci $7+5\sqrt{2}\in A$

b) Se verifică prin calcul.

c) Avem $f\left(7+5\sqrt{2}\right)=-1$. Mai mult, $f\left(\left(7+5\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right)=\left(f\left(7+5\sqrt{2}\right)\right)^{2n+1}=-1,\ \forall n\in\mathbb{N}$, iar şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\left(7+5\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ are termenii distincți, în $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Soluție

1. a) Din $A^2 = 0_2$ obținem sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ (a-d)(a+d) = 0 \end{cases}$. Presupunem că $a + d \neq 0$. Rezultă $b = c = 0$ și $a = d$. Din prima și din ultima ecuație obținem $a = d = 0$, deci $a + d = 0$, contradicție.

b) Se arată că $(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$, deci $(I_2 + A)^{-1} = I_2 - A$.

c) Matricele de forma $X = \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt soluții.

2. a) Se arată că $f(a) = 0$.

b) Notând $x^2 = t$ obținem ecuația $t^2 - 2t + 9 = 0$, ale cărei soluții au $|t_1| = |t_2| = 3$.
Rezultă $|x_1| = |x_2| = \sqrt{|t_1|} = \sqrt{3}$, $|x_3| = |x_4| = \sqrt{3}$ și suma căutată este egală cu $4\sqrt{3}$.

c) Evident, $B \subset A$. Fie $\alpha = g(a) \in A$. Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q, h \in \mathbb{Q}[X]$, cu $\operatorname{grad}(h) \leq 3$, astfel încât $g = (X^4 - 2X^2 + 9) \cdot q + h$. Rezultă $\alpha = g(a) = h(a) \in B$, deci $A \subset B$.

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(\left(A-A^t\right)^t\right)=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$ deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) Minorul $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ este nenul.

2. a) Pentru orice $x\in[0,\infty)$, avem $f(x)=x^3+p\cdot x^2+q\cdot x+r>0$.

b) $S_1=x_1+x_2+x_3=-p$, $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$.

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p\cdot\left(S_1^2-2S_2\right)-q\cdot S_1-3r=-p^3+3pq-3r$.

c) Fie polinomul $g\in\mathbb{R}[X]$, $g=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$, cu rădăcinile a,b,c. Deoarece $p=-(a+b+c)>0$, $q=ab+bc+ca>0$ şi $r=-abc>0$, din punctul a) rezultă că rădăcinile a,b,c ale lui g nu sunt în intervalul $[0,\infty)$. Aşadar, $a,b,c\in(-\infty,0)$.

Soluții

1. a) Se arată că $A^3 = O_3$.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, din $A \cdot X = X \cdot A$ rezultă $g = 0$, $d + g = 0$, $a = e + h$, $d = h$, $a + b = f + i$, $d + e = i$ şi $g + h = 0$. Se obține $g = d = h = 0$, $a = e = i$ şi $b = f$.

c) Presupunem că există $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $X^2 = A$.

Rezultă $A \cdot X = X \cdot A$. Din **b)**, există $a, b, c \in \mathbf{C}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Din $X^2 = A$, rezultă că $\det(X) = 0$, deci $a = 0$. Se obține $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A$.

2. a) $f(3) - f(1) = a\left(3^4 - 1\right) + b(3 - 1)$ și rezultă concluzia.

b) Se obține $f(x) - f(y) = (x - y)\left(a(x + y)\left(x^2 + y^2\right) + b\right)$.

c) Cum $b - 1$ divide 1 rezultă $b \in \{0, 2\}$. Dacă $b = 0 \Rightarrow a = 1,\ c = 3$. Dacă $b = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{15} \notin \mathbb{Z}$.

Soluții

1. a) Se calculează $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$.

b) Se arată că unica soluție este $x=y=z=0$.

c) Se obțin soluțiile $(\alpha,-\alpha,0)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$.

2. a) $9,4\in\mathbb{Z}$ şi $9^2-5\cdot 4^2=1$, deci $z\in M$

b) Se arată uşor că $\forall\, z_1,z_2\in M$, avem $z_1\cdot z_2\in M$ şi $z_1^{-1}\in M$.

c) Se demonstrează că pentru $z=9+4\sqrt{5}\in M$, $\forall\, k,n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\neq k$, avem $z^n\neq z^k$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $S = 0_3$.

b) Se calculează $A^2 = 14 \cdot A$, apoi $B \cdot C = I_3 + (15a+1) \cdot A$ și se obține $a = -\frac{1}{15}$.

c) Se folosește relația $A^2 = 14 \cdot A$ și se demonstrează prin inducție matematică.

2. a) Deoarece $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)\left(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1\right)$ și $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) Determinantul sistemului este $\Delta = (\varepsilon - 1)\left(\varepsilon^2 - 1\right)\left(\varepsilon^2 - \varepsilon\right) \neq 0$, deci sistemul are doar soluția nulă $x = y = z = 0$.

c) Din ipoteză, există $g \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât $f_1\left(X^3\right) + Xf_2\left(X^3\right) + X^2 f_3\left(X^3\right) = \left(X^3 - 1\right) \cdot g(X)$.

Deoarece numerele 1, ε și ε^2 sunt rădăcinile polinomului $X^3 - 1$, se obține sistemul

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon + a_3 \cdot \varepsilon^2 = 0, \text{ unde } a_k = f_k(1), \ \forall k \in \{1, 2, 3\}. \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon^2 + a_3 \cdot \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Folosind punctul **b)** se deduce că $f_k(1) = 0$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, de unde rezultă concluzia.

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Prin calcul direct se obține unica soluție $\begin{cases} x = pqr \\ y = -(pq + qr + rp) \\ z = p + q + r \end{cases}$.

c) Numerele p, q, r verifică aceeași ecuație de grad trei $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, deci $p = q = 1$ sau $p = r = 1$ sau $q = r = 1$.

2. a) A are 25 de elemente.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ atunci $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \hat{1}$ și $ab = \hat{0}$.

Dacă $a = \hat{0} \Rightarrow b^2 = \hat{4} \Rightarrow b \in \{\hat{2}, \hat{3}\}$. Dacă $b = \hat{0} \Rightarrow a^2 = \hat{1} \Rightarrow a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$.

Obținem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$

c) Matricea $Y = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \neq O_2$ are determinantul $\hat{0}$, deci nu e inversabilă.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $rang\left(A_0\right)=1$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$,

$C_n \overset{not}{=} A^nB-BA^n=A^{n-1}\left(AB-BA\right)+\left(A^{n-1}B-BA^{n-1}\right)A\overset{ip}{=}A^{n-1}\cdot A+C_{n-1}\cdot A$.

Folosind relația anterioară, se demonstrează prin inducție concluzia.

2. a) Avem $f(-1)=f(1)=0$ și obținem $a=-4$ și $b=12$.

b) Deoarece ecuația are coeficienți reali, dacă admite rădăcina $x_1=i$, va avea și rădăcina $\overline{x_2}=-i$, deci polinomul f se va divide cu $\left(X-i\right)\left(X+i\right)=X^2+1$, adică $a=4$ și $b=-12$.

c) Rădăcinile x_1,x_2,x_3 sunt în progresie aritmetică, deci există $z,r\in\mathbb{C}$ astfel încât $x_1=z-r$, $x_2=z$ și $x_3=z+r$. Obținem $x_1+x_2+x_3=3z=3$, deci $z=1$.

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(1-r\right)^2+1+\left(1+r\right)^2=11$, deci $r\in\left\{-2,2\right\}$, iar rădăcinile sunt $-1,1,3$.

În final, $a=4\cdot\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-4$ și $b=-4x_1x_2x_3=12$.

Soluție

1. Patru matrice, şi anume $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

b) $\det(A)=1\neq 0$, deci matricea A este inversabilă. Se obține $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}\notin M$.

c) Fie $B=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\in M$ inversabilă , cu $B^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}\in M$. $B\cdot B^{-1}=I_2 \Leftrightarrow \begin{cases}ax+bz=1\\ay+bt=0\\cx+dz=0\\cy+dt=1\end{cases}$.

Deoarece $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, se obțin soluțiile $B_1=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

2. a) Adunând relațiile lui Viète, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{a}{1}$ şi $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{8}{1}$ şi grupând, obținem concluzia.

b) Avem $x_1+x_4=x_2+x_3=4$. Folosind a treia relație a lui Viète, obținem $x_1x_4+x_2x_3=-2$.
Din a doua relație a lui Viète, obținem $a=14$.

c) x_1,x_2,x_3,x_4 sunt în progresie aritmetică, deci există $z,r\in\mathbb{C}$, astfel încât $x_1=z-3r$, $x_2=z-r$, $x_3=z+r$ şi $x_4=z+3r$. Avem $x_1+x_4=x_2+x_3=4$, deci $z=2$ şi din b) obținem $a=14$ şi $x_1x_4+x_2x_3=-2$. Rezultă $r^2=1$ şi $b=-15$.

Soluție

1. a) Se arată că $AB = BA = O_4$, deci $AB + BA = O_4$

b) Se arată că $\operatorname{rang}(A+B) = 2$ şi $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 1$.

c) Se demonstrează folosind faptul că $AB = BA = O_4$ şi binomul lui Newton.

2. a) Deoarece $f(-1) = 0$, se obține $a = 6$.

b) Observăm că $x_0 = 0$ nu este rădăcină pentru f.

Pentru $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, x_i e rădăcină a lui f $\Leftrightarrow$ $x_i^4 + ax_i^3 + 4x_i^2 + 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $1 + a \cdot \frac{1}{x_i} + 4\frac{1}{x_i^2} + \frac{1}{x_i^4} = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{x_i}$ este rădăcină a lui g

c) Din $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i^2} = -8 < 0$ rezultă concluzia.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. a) Se arată că $AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Dacă X este o soluție a ecuației, obținem că $X \in C(A)$, deci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. Rezultă $\begin{pmatrix} x^2 + x & 0 \\ 2xy + y & x^2 + x \end{pmatrix} = A$, deci $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ (2x+1)y = 3 \end{cases}$, adică $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$. Se obțin soluțiile $X_1 = B$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. a) Fie $x, y \in G$. Avem $1 + xy \in (0, 2)$, deci $1 + xy > 0$ .Atunci, $x * y \in G \iff \begin{cases} (x+1)(y+1) > 0 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$, adevărat.

b) Se verifică prin calcul.

c) $f(x) = f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{8}{10} = \frac{1}{45}$. Din $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{45}$ rezultă $x = \frac{22}{23}$.

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Din $A^2 = 0_2$ obținem sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ (a-d)(a+d) = 0 \end{cases}$. Presupunem că $a + d \neq 0$. Rezultă $b = c = 0$ și $a = d$. Din prima și din ultima ecuație din sistem rezultă $a = d = 0$, deci $a + d = 0$, contradicție.

c) Din punctul b) avem că $a + d = 0$ și din $A^2 = 0_2$ deducem $\det(A - x \cdot I_2) = x^2$.

Obținem $\det(A + 2I_2) = 4$.

2. a) $(a,15) \in G \Leftrightarrow a^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$. Se obține $a \in \{-26, 26\}$.

b) Pentru $(a,b),(c,d) \in G$, avem $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$ și $(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1$.

c) Se verifică axiomele grupului. Se arată că elementul neutru este $(1, 0) \in G$ și $\forall (a,b) \in G$, simetricul acestuia este $(a, -b) \in G$.

Soluție

1. a) $\det(A) = -2 \neq 0$, deci $rang(A) = 2$.

b) Se arată că $f(B) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $f(X) = B$ atunci $tr(AX - XA) = tr(B)$, deci $0 = 2$ fals.

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2a^2$.

b) x_1 e o rădăcină a polinomului $f \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + a^2x_1 - a = 0 \overset{x_1^3 \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 + \frac{a^2}{x_1^2} - \frac{a}{x_1^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}$ este o rădăcină a polinomului g.

c) Notăm cu $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$ rădăcinile polinomului g. Deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2a^2 < 0$, rezultă că f are o singură rădăcină reală, de exemplu x_1. Atunci, $\frac{1}{x_1} \in \mathbb{R}$ este unica rădăcină reală a lui g.

Presupunem că $x_1 = \frac{1}{x_1}$, deci că $x_1 \in \{-1, 1\}$. Dacă $x_1 = -1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(-1) = 0$ deducem $a^2 + a + 1 = 0$, fals. Dacă $x_1 = 1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(1) = 0$ deducem $a^2 - a + 1 = 0$, fals.

Soluție

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = -5a + 20$. Obținem $a = 4$.
b) Dacă $\Delta \neq 0$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil.
Pentru $\Delta = 0$, deci pentru $a = 4$, un minor principal este $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, iar sistemul este incompatibil dacă și numai dacă $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix} \neq 0$, adică pentru $b \neq 4$.
c) Din $x + z = 2y$ și din prima ecuație rezultă $y = \frac{1}{4}$. Din primele două ecuații deducem $x = \frac{3}{4}$, $z = -\frac{1}{4}$ și din ecuația a treia, singura condiție este $a + 4b = 20$, verificată de o infinitate de perechi $(a, b) \in \{(20 - 4b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$.
2. a) Se verifică prin calcul.
b) Cum $\sin t \in \mathbb{Z}, \cos t \in \mathbb{Z}$ și $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ rezultă că $\sin t = 0$ și $\cos t = \pm 1$ sau $\sin t = \pm 1$ și $\cos t = 0$.
Deci $t = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.
c) Se verifică axiomele grupului. Elementul neutru este $X(0) = I_2$ și pentru $X(t) \in G$, $(X(t))^{-1} = X(-t) \in G$.

Soluție

1. a) Determinantul este $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 \neq 0$.

b) Se obține soluția $x_0 = \dfrac{1}{a^2+1}$, $y_0 = \dfrac{a}{a^2+1}$, $z_0 = \dfrac{a^2}{a^2+1}$, cu $y_0^2 = x_0 \cdot z_0$.

c) După calcule, se obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2+1} & \dfrac{-a}{a^2+1} & \dfrac{a^2}{a^2+1} \\ \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} & \dfrac{-a}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \end{pmatrix}$.

2. a) Se obține $e = 6$.
b) Se arată că corespondența este o lege de compoziție pe G. Se verifică apoi axiomele grupului.
Se obține că elementul neutru este $e = 6$, iar simetricul lui $x \in G$ este $x' = 5 + \dfrac{1}{x-5} \in G$.

c) Notăm $\begin{cases} x - 5 = a > 0 \\ y - 5 = b > 0 \\ z - 5 = c > 0 \end{cases}$ și obținem sistemul $\begin{cases} ab = c \\ bc = a \\ ca = b \end{cases}$, cu unica soluție $a = b = c = 1$.
Singura soluție a sistemului inițial este $x = y = z = 6$.

Soluție

1. a) $A^t = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ şi obținem $B = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$.

b) Se obține $\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \geq 0$

c) Punctele P_1, P_2, P_3, O sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0, \ \forall k, t \in \{1, 2, 3\}$.

$\det(B) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0, \ \forall t, k \in \{1, 2, 3\}, \ t \neq k$ şi rezultă concluzia.

2. a) Numărul elementelor mulțimii este $|\mathbb{Z}_5|^{|L|} = 5^2 = 25$, unde $L = \{a, b\} \subset \mathbb{Z}_5$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Se verifică axiomele grupului. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}_5$, notăm $A(a, b) = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Elementul neutru este $I_3 = A(\hat{0}, \hat{0})$, iar simetrica matricei $A(a, b)$ este matricea $A(-a, -b)$.

Soluție

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I_2$.

b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.Din $A \cdot X = X \cdot A$, rezultă $b = c, d = a - b$ deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$.

Dacă $\det(X) = 0 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$.Dacă $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X = 0_2$,contradicție.Dacă $b \neq 0$,împărțind prin $b \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0, t = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, fals.Deci $\det X \neq 0$, adică X este inversabilă.

c) $F_2 = 1$. Demonstrăm prin inducție.Verificare. $n = 1; A = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Presupunem adevărată pentru n și demonstrăm pentru $n+1$. $A^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$.

2.a) $\sigma \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \pi \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Cum aceste permutări nu comută, rezultă concluzia.

b) Prin calcul direct se obține că ord(π)=3 .Deci $H = \{e, \pi, \pi^2\}$.

c) Fie $\pi^i, \pi^j \in H \Rightarrow \pi^{i+j} \in H$ .Cum H este finită , rezultă H este subgrup al lui S_5.

Soluție

1.a) $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&4&2&3&5\end{pmatrix}$.

b) $m(\sigma)=7$ $m\left(\sigma^{-1}\right)=7$.

c) $\varepsilon(\sigma)=-1$ Dacă ar exista o soluție x atunci $\varepsilon\left(x^4\right)=\varepsilon(\sigma)$ sau $1=-1$ contradicție.

2.a) $x>1, y>1 \Rightarrow xy-x-y+2>1$, deoarece $(x-1)\cdot(y-1)>0$.

b) $f(xy)=xy-1;\ f(x)\circ f(y)=(x+1)\circ(y+1)=xy+1$.

c) Fie $f^{-1}:G\to(0,\infty)$ care este izomorfism , $f^{-1}=g$ și deci

$\underbrace{x*x*...*x}_{10}=1025 \Rightarrow (g(x))^{10}=g(1025) \Leftrightarrow (g(x))^{10}=1024 \Leftrightarrow (x-1)^{10}=1024 \Rightarrow x\in\{-1;3\}$.

Soluție

1.a) $A\cdot(X+Y)=A\cdot X+A\cdot Y=X\cdot A+Y\cdot A=(X+Y)\cdot A\Rightarrow X+Y\in C(A)$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $A\cdot E_1=E_1\cdot A, A\cdot E_2=E_2\cdot A\Rightarrow a=d, c=b=0\Rightarrow A=a\cdot I_2$.

c) Dacă oricare trei se află în $C(A)$ atunci există $\alpha\in\mathbb{C}, A=\alpha\cdot I_2\Rightarrow$ a patra matrice se află în $C(A)$.

2.a) $x=a^{-1}\cdot b$, $x=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $a\cdot b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{ord}(ab)=5$.

c) $\operatorname{ord}(b)=6\Rightarrow b^k=e$ echivalent cu $6\mid k$.

Soluție

1.a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A \cdot B \neq B \cdot A$.

b) Prin calcul direct.

c) Notăm $C = A \cdot B$. $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ apoi prin inducție completă se arată că $C^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ deci răspunsul este negativ.

2a) $X^3 - 2 \cdot X - 1 = (X+1) \cdot P$.

b) $Q_3 = X^3 - 2 \cdot X - 1$ are trei rădăcini reale : $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Prin inducție completă după n .Pentru $n = 2$, $Q_2 = P \vdots P$. Presupunem afirmația adevărată pentru n şi o demonsrăm pentru $n+1$. $Q_{n+1} = X^{n+1} - F_{n+1} \cdot X - F_n = X \cdot \left(X^n - F_n \cdot X - F_{n-1}\right) + F_n \cdot \left(X^2 - X - 1\right)$, de unde rezultă afirmația .

Soluție

1.a) $x_{n+1} = a \cdot x_n - b \cdot y_n$, $y_{n+1} = b \cdot x_n + a \cdot y_n$. Deci $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(x_n^2 + y_n^2\right)$

b) Șirurile $\left(x_n\right)_n$, $\left(y_n\right)_n$ sunt mărginite $\Leftrightarrow$ $\left(d_n\right)_n$, $d_n = x_n^2 + y_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ este mărginit.

$d_{n+1} = \left(a^2 + b^2\right) \cdot d_n$ deci $d_n = \left(a^2 + b^2\right)^n \cdot \left(x_0^2 + y_0^2\right)$. Dacă $a^2 + b^2 \le 1 \Rightarrow d_n \le x_0^2 + y_0^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă $a^2 + b^2 > 1$ șirul (d_n) este nemărginit.

c) $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_n = 2^n \cdot \left(x_0 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} - y_0 \cdot \sin\frac{n\pi}{3}\right)$

De aici rezultă relația cerută.

2.a) $\hat{1}^2 = \widehat{10}^2 = \hat{1}^2$, $\hat{2}^2 = \hat{9}^2 = \hat{4}$, $\hat{3}^2 = \hat{8}^2 = \hat{9}$, $\hat{4}^2 = \hat{7} = \hat{5}$, $\hat{5}^2 = \hat{6}^2 = \hat{3} \Rightarrow$ ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

b) Numărul este $10 \cdot 11^2 = 1210$.

c) Dacă polinomul are o soluție $a \in \mathbb{Z}_{11}$, atunci $a^2 + a + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\left(\hat{2}a + \hat{1}\right)^2 = \hat{8}$, fals. Cum polinomul dat are gradul doi și nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_{11}$, rezultă concluzia.

Soluție

1.a) $f(A)=A^2=I_2$.

b) $f\left(X+f(X)\right)=A\cdot(X+A\cdot X)=A\cdot X+A^2\cdot X=A\cdot X+X=X+f(X)$.

c) Fie $f(X_1)=f(X_2)\Rightarrow A\cdot X_1=A\cdot X_2\Rightarrow X_1=X_2$, deoarece A este inversabilă , deci f este injectivă. Fie $Y\in M_2(\mathbb{R})$. $X=A^{-1}\cdot Y$ este o preimagine a lui Y .Rezultă f este surjectivă, deci f este bijectivă.

2.a) $X,Y\in M\Rightarrow A\cdot X=X\cdot A, A\cdot Y=Y\cdot A\Rightarrow A\cdot(X\cdot Y)=(A\cdot X)\cdot Y=(X\cdot A)\cdot Y=X\cdot(A\cdot Y)=$
$X\cdot(Y\cdot A)=(X\cdot Y)\cdot A$.

b) Fie $X,Y\in G\Rightarrow \det(X)\neq 0,\det(Y)\neq 0,\det(X\cdot Y)\neq 0$ şi $X\cdot Y\in M\Rightarrow X\cdot Y\in G$.

$X\in M$ şi $X=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$.Cum $\det(X)\neq 0\Rightarrow a\neq 0$. $X^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0\\ -\frac{c}{a^2} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}\in G$

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$, $X^2=I_2\Rightarrow c=0, a=\pm 1$. Deci există un element de ordin doi $X=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Soluție

1.a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3, y_1 = 2$; $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 17, y_2 = 12.$

b)Demonstrăm prin inducție. $x_0 + y_0 \cdot \sqrt{2} = 1, x_1 + y_1 \cdot \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ .Presupunem adevărat pentru n şi demonstrăm pentru $n+1$.

$x_{n+1} + y_{n+1} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot x_n + 4 \cdot y_n + (2x_n + 3y_n)\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right) = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{n+1}$.

c) $\begin{matrix} x_{n+2} = 3 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot y_{n+1} \\ y_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 3 \cdot y_{n+1} \end{matrix}$; Deci $x_{n+2} - 6 \cdot x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \geq 0$.

2.a) $\hat{3}x^2 = \hat{3} \Rightarrow x^2 = \hat{1} \Rightarrow x \in \left\{\hat{1}, \hat{6}\right\}$

b) $\text{ord}\left(\hat{3}\right) = 6$

c) Presupunem că f este un morfism de grupuri. $f\left(\bar{0}\right) = \hat{1}$; $f\left(\bar{0}\right) = f\left(\bar{2} + \bar{2} + \bar{2}\right) = \left(\hat{3}\right)^3 = \hat{6} = \hat{1}$, contradicție.

Soluție

1.a) $d=\dfrac{bc}{a}\Rightarrow f(x)=\dfrac{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}=\dfrac{a}{c}$

b) Fie $x_1,x_2>0$ a.î. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1(ad-bc)=x_2(ad-bc)$, deci $x_1=x_2$, adică f este injectivă.

c) Inducție după n. Pentru $n=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$. Presupunem adevărată pentru n și demonstrăm pentru $n+1$. $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x)=\dfrac{a_nf(x)+b_n}{c_nf(x)+d_n}=\dfrac{a_{n+1}x+b_{n+1}}{c_{n+1}x+d_{n+1}}$, deoarece $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\cdot A$.

2a) Fie $X\in G, X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1&b\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det X=a+1\neq 0$.

b) $A^2=A, B^2=0_2, A\cdot B=B, B\cdot A=0_2$. Fie $X_1,X_2\in G;\ X_1=I_2+aA+bB,\ X_2=I_2+a'A+b'B.$

$X_1\cdot X_2=I_2+\left(a+a'+aa'\right)A+\left(b+b'+bb'\right)B$, $a+a'+aa'\neq -1$. $(X_1)^{-1}=I_2-\dfrac{a}{a+1}A-\dfrac{b}{a+1}B,$ deci G este un grup.

c) $X^2=I_2\Rightarrow X=I_2-2A+bB, b\in\mathbb{R}.$

Soluție

1.a) $\Delta = 14m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{7}\right\}$.

b) $m = \frac{2}{7}$.

c) $d_2 \cap d_3 = \{(7,-3)\}; (7,-3) \in d_1 \Rightarrow m = \frac{2}{7}$.

2.a) $\det A = m \in \{\pm\hat{1}\}$. Cum $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ este un corp comutativ , rezultă că A este inversabilă. Se arată că $ABA = B$.

b) $|H| = 10$. Fie $X_1, X_2 \in H \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} m' & n' \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. $X_1 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} mm' & mn' + n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$, deoarece

$mm' \in \{\pm\hat{1}\}$.

c) $X_1^2 = I_2, X_1 \neq I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & mn + n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Rightarrow m^2 = \hat{1}$ și $n\left(m + \hat{1}\right) = \hat{0}$ .Pentru $m = \hat{1}, n = \hat{0} \Rightarrow X_1 = I_2$, fals.

Pentru $m = -\hat{1}, n \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow 5$ soluții.

Soluție

1.a) $f(A) = A^2 = 0_2$.

b) $f(f(X)) = f(AX) = A^2 X = 0_2$.

c) Presupunem $f(X) + f(Y) = I_2 \Rightarrow A(X+Y) = I_2$ şi aplicăm pe $f \Rightarrow f(A(X+Y)) = f(I_2) \Rightarrow A^2(X+Y) = A$ $\Rightarrow 0_2 = A$, contradicție.

2a) $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^t = I_2$, deci $A \in P$.

b)Fie $A, B \in P, A \cdot A^t = I_2 \Rightarrow \det(A \cdot A^t) = 1 \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^t) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă

$\Rightarrow A^t = A^{-1} \Rightarrow P = GL_2(\mathbb{R}) =$ grup .

c) $X = A^{-1} \cdot B; \det(X) = (\det A^{-1}) \cdot (\det B) \neq 0 \Rightarrow X \in GL_2(\mathbb{R}) = P$.

Soluție

1.a) $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&c&d\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+c&b+d\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=M_{a+c,b+d}$

b) $M_{0,0}=I_3$ este elementul neutru .Pentru orice matrice $M_{a,b}\in G$, există matricea $M_{-a,-b}\in G$ a.î.
$M_{a,b}\cdot M_{-a,-b}=M_{0,0}=M_{-a,-b}\cdot M_{a,b}$. . $M_{c,d}\cdot M_{a,b}=M_{c+a,d+b}=M_{a+c,b+d}=M_{a,b}\cdot M_{c,d}$.

c) $M_{a,b}-M_{a,b}^t=M=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&0\\-b&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M)=0.$ Dacă $a=0,b\in\mathbb{R}^*\Rightarrow rang(M)=2.$

Dacă $a=0,b=0\Rightarrow rang(M)=0$. Dacă $a\in\mathbb{R}^*\Rightarrow rang(M)=2$.

2a) $ord(e)=1$, $ord(a)=ord(b)=ord(c)=2$ .Deci $x=e$ este unica soluție.

b) $\forall x\in K, x^2=e\Rightarrow K$ este comutativ. Dacă $ab=a\Rightarrow b=e$, fals. Dacă $ab=b\Rightarrow a=e$, fals.
Dacă $ab=e\Rightarrow b=a^{-1}=a$, fals. Deci $ab=c$.

c) Nu sunt izomorfe deoarece K nu este ciclic şi $\mathbb{Z}_4$ este ciclic fiind generat de $\hat{1}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = 2B.$

b) $A^2 = 2A \Rightarrow a^2 + bc = 2a; b(a+d) = 2b;\ c(a+d) = 2c; bc + d^2 = 2d$. Dacă $b \neq 0 \Rightarrow a + d = 2,$ contradicție. Deci $b = 0.$ Analog $c = 0.$ $a^2 = 2a, d^2 = 2d, a + d \neq 2 \Rightarrow A = O_2$ sau $A = 2I_2.$

c) $d = 2 - a; \det(A) = ad - bc = a(2-a) - bc = 0$.

2.a) Aplicăm algoritmul lui Eucid. $x^6 - 1 = (x^4 - 1)\cdot x^2 + (x^2 - 1)$. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)\cdot(x^2 + 1)$, deci $(f, g) = x^2 - 1.$

b) 8 soluții distincte.

c) $f(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

Soluție

1.a) $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}; A^t=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}=A\Rightarrow A\in P$; $B=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}; B^t=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}=-B\Rightarrow B\in Q.$

b) Fie $A,B\in Q\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix}-ab&0\\0&-ab\end{pmatrix}=(AB)^t\Rightarrow AB\in P.$

c) $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}; X^t=-X\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}\Rightarrow a=d=0; c=-b$. $X=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$; $\det(X)=b^2\geq 0$.

2a) $f'(x)=3x^2+4x+3>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, f este continuă deci are P.D. $\Rightarrow f(x)=0$ are o unică soluție reală.

b) $\hat{f}\left(\hat{0}\right)=\hat{1}, \hat{f}\left(\hat{1}\right)=\hat{1}$

c) Dacă $f=gh, grad(h)\geq 1, grad(h)\geq 1\Rightarrow \hat{f}=\hat{g}\cdot\hat{h}$, deci $\hat{f}$ este reductibil, contradicție.

Soluție

1.a) Fie $Y=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; AX = XA \Rightarrow t = x, y = 3z.$

b) $\text{Det}(X) = x^2 - 3y^2 = 0;$ Dacă $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow X = 0_2$. Dacă $y \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} \in \{\pm\sqrt{3}\}$, contradicție.

c) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \Rightarrow XY=\begin{pmatrix} ac+3bd & 3(bc+ad) \\ bc+ad & ac+3bd \end{pmatrix}.$

Utilizând metoda inducției matematice, rezultă concluzia.

2a) $f(1) = 0.$

b) $\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 - 2\left(\sum_{1\le i<j\le 5} x_i x_j\right) = -5.$

c) $f(x) = (x-1)(x^4+3x^2+2x+2);\ x^4+3x^2+2x+2 = (x^2+1)^2 + (x+1)^2 > 0.$

Soluție

1.a) $a = 2, b = 0.$

b) $a = 4, b \neq -2.$

c) $a \neq 4; b = -a + 2 \Rightarrow x, y, z \in \mathbb{Z}$ .Pentru $a = 4$, $b = -2$.

2.a) Cum $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ și variază independent , rezultă că A are 8 elemente.

b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$.Dacă $a = \hat{0} \Rightarrow X^2 = O_3$.Dacă $a = \hat{1} \Rightarrow X^2 = I_3$.

c) În egalitatea $X^2 = 0_3$ trecând la determinant se obține $a = \hat{0}$ .Cum $X = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ b & c & \hat{0} \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{Z}_2$ verifică egalitatea $X^2 = 0_3$, rezultă că avem 4 soluții.

Soluție

1.a) $m = 7.$

b) $M_1(1,1); M_2\left(\frac{4m-3}{25}, \frac{3m+4}{25}\right); M_3\left(\frac{2m-9}{5}, \frac{12-m}{5}\right), m \in \mathbb{Z}.$ Considerăm $m = 25k + 7, k \in \mathbb{Z}$.

c) $S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \Delta = \frac{1}{25}(-m+7)(14-2m); S = 1 \Leftrightarrow m \in \{2,12\}$.

2.a) $f(-1) = 0.$

b) $f(x) = (x+1)\left(2x^2 - (a+2)x + 2\right)$; rădăcinile sunt reale pentru $a \in (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$.

c) $x_1 = -1; x_3 = \frac{1}{x_2}; |x_2| + |x_3| = 2 \Leftrightarrow |x_2| = 1 \Leftrightarrow a \in [-6, 2].$

Soluție

1.a) $\det A = (m-1)^2$.

b) Dacă $m \neq 1 \Rightarrow rangA = 3$. Dacă $m = 1 \Rightarrow rangA = 1$.

c) Caz de incompatibilitate $m = 1$.

Dacă $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \Rightarrow x = 1 + \frac{3}{m-1}; y = 0; z = \frac{-3}{m-1}$. Deci $m \mid 3 \Rightarrow m \in \{-2, 0, 2, 4\}$.

2a) Se verifică prin calcul.

b) $\alpha = [1234], \beta = [1342]$.

c) $x \cdot \beta^{-1} = \alpha^{-1} \cdot x \Leftrightarrow \alpha \cdot x = x \cdot \beta$. $\gamma = x$.

Soluție

1.a) $B^t = A^t + A = B$,

b) Din ipoteză rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ -x & 1 & z \\ -y & -z & 1 \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, deci $\det(A) = 1 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.

c) Dacă $x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow B = x\left(A - A^t\right) \Rightarrow \det B = 0$.

2.a) $x\left(x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = i, x_3 = -i$.

b) $i(p+2) + p + q - 2 = 0, p, q \in \mathbb{R} \Rightarrow p = -2, q = 4$.

$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \in \mathbb{N}. S_n = -pS_{n-2} - qS_{n-3}, \forall n \geq 3.$

c) $S_0 = 3, S_1 = 0, S_2 = -2p, S_3 = -3q, S_4 = 2p^2, S_5 = 5pq.$

$S_6 = -2p^3 + 3q^2, S_7 = -7p^2q.$

Soluție

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se verifică relația.

b) $A^3 - A = A^2 - I_3; A^5 - A^3 = A^4 - A^2; A^7 - A^5 = A^6 - A^4; ..., A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^{2n} - A^{2n-1}$

Prin însumare obținem: $A^{2n+1} - A = A^{2n} - I_3; A^{2n+2} - A^2 = A^{2n+1} - A \Rightarrow$

$A^{2n} - A^2 = A^{2n-1} - A \Rightarrow A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^2 - A = I_3$; $A^{2n+2} - A^{2n} = A^2 - I_3$

c) Demonstrăm prin inducție. Verificăm pentru $n = 1$, $n = 2$. Presupunem adevărată pentru toate valorile $\leq n-1$ și demonstrăm pentru n. Utilizând relația $A^n = A^{n-2} + A^2 - I_2$, rezultă concluzia.

2.a) $x^4 - 1 = 0$ are soluțiile complexe: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$

b) $P_3 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$ unde $\varepsilon_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

c) $x^6 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $[A, A^2] = A^3 - A^3 = 0_2$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

c) $[A, BC - CB] = ABC - ACB - BCA + CBA$. Prin permutări circulare se obțin celelalte două relații.Adunând se obține egalitatea.

2.a) $0 < a < 1, 0 < b < 1 \Rightarrow ab \in (0,1), (1-a)(1-b) \in (0,1)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare, deci injectivă. f este continuă deci are P.D.,

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{Im} f = (0,1) \Rightarrow f$ surjectivă, deci bijectivă. Se verifică egalitatea.

c) $f(1) = \dfrac{1}{2}; \exists! y > 0,\ f(y) = x; f(y^3) = x \circ x \circ x = f(1) \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Soluție

1.a) $D_2 = 3; D_3 = 4$.

b) Se dezvoltă determinantul după prima linie.

c) Se demonstrează prin inducție. Verificare pentru $n = 2, n = 3$. Dacă este adevărată pentru $2 \le k \le n-1, D_n = 2n - (n-1) = n+1$.

2.a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \left\{ \left(\hat{0}, \hat{0} \right), \left(\hat{0}, \hat{1} \right), \left(\hat{1}, \hat{0} \right), \left(\hat{1}, \hat{1} \right) \right\}$ .Se completează tabla operației de adunare .

b) $(xy)^2 = e, x^2y^2 = ee = e$.

c) $x = x^{-1}, \forall x \in G; \forall a, b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = ab = b^{-1}a^{-1} = ba$.

Soluție

1.a) $A^2 = 3A; x = -\frac{1}{9}$.

b) $B = \frac{1}{\sqrt{3}} A$.

c) Prin calcul direct.

2.a) $x_1 = 2; x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$.

b) $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, \forall n \geq 0; S_0 = 3, S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 18, S_4 = 2$.

c) Se scriu relațiile lui Viète, se obține $m = 0$.

Soluție

1.a) $A_M(1,1)$.

b) $y' = 2x'$.

c) $x_1' = ax_1 + by_1, y_1' = cx_1 + dy_1; x_2' = ax_2 + by_2\ \ y_2' = cx_2 + dy_2; x_3' = ax_3 + by_3, y_3' = cx_3 + dy_3$.
Se utilizează proprietăți ale determinanților.

2.a) 16.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $X = I_3$ sau $X = O_3$.

Soluție

1.a) $\det A = 0$
b) Se verifică prin calcul.
c) $\det(I_3 + xA^2) = (1-6x)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2.a) $x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$.
b) $p(1) = 0, p'(1) = 0 \Rightarrow a = -2, b = 0$.
c) Singurele rădăcini raționale ale polinomului $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ sunt $x = \pm 1 \Rightarrow a \in \{-3, 1\}$.

Soluție

1.a) $AB = 0_3$

b) $A^2 = 3A, AB = BA = 0_3, B^2 = 3B.$ Se verifică relația.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow M_x$ este inversabilă, deci $\det\left(M_x\right) \neq 0.$

2.a) Aplicăm relațiile lui Viète, $\sum_i x_i = a, x_1x_2x_3x_4 = 1, \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k = a.$

b) Dacă se divide , atunci $p(1) = 0, p(-1) = 0 \Rightarrow a = 1 = -1$, contradicție.

c) Se împarte ecuția reciprocă $f(x) = 0$ prin x^2, se notează $x + \frac{1}{x} = t$ etc.

Soluție

1.a) Se dezvoltă determinantul; se obține $\det A = 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

b) $A \cdot A^* = \det A \cdot I_3 \Rightarrow \det A \cdot \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^3 \Rightarrow \det A \cdot \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^3$.

Cum $\det A \neq 0 \Rightarrow \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^2$.

c) Avem $A - I_3 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$ şi se observă că orice minor de ordin 2 al matricei A este nul. Ca urmare, rangul matricei $A - I_3$ este cel mult 1.

2.a) Dacă $f(x) = f(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Rightarrow x = y$, adică f este injectivă.

Pentru orice $y \in G$, considerând $x = a^{-1}y \in G$, rezultă $f(x) = y$, deci f este surjectivă.

b) $\left(f_a \circ f_b\right)(x) = f_a\left(f_b(x)\right) = a \cdot f_b(x) = a(bx) = (ab)x = f_{ab}(x), \forall x \in G$.

c) Compunerea funcțiilor este asociativă. Elementul neutru este $1_G = f_e \in \mathcal{F}(G)$, unde e este elementul neutru din G. Dacă a^{-1} este simetricul lui $a \in G$, atunci $f_{a^{-1}}$ este simetricul elementului $f_a \in \mathcal{F}(G)$.

Soluție

1. **a)** Prin calcul direct rezultă $\det A = 3\left(1 - m^2\right)$.

b) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ rezultă $\det A \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A) = 3$.

Pentru $m = 1$ sau $m = -1$, există cel puțin un minor de ordin doi nenul în A, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$.

c) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, sistemul este compatibil determinat.

Pentru $m = 1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 2, egal cu rangul lui A, deci sistemul este compatibil (nedeterminat).

Pentru $m = -1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 3, şi cum $\operatorname{rang} A = 2$, rezultă sistemul este incompatibil.

2. **a)** Se verifică prin calcul direct că $x * y \in G_2,\ \forall x, y \in G_2$, adică operația „$*$" este corect definită pe G_2.

Folosind definiția se verifică şi asociativitatea şi comutativitatea operației. Elementul neutru este $e = \frac{7}{3}$, iar simetricul oricărui element $x \in G_2$ este $x' = \frac{18x - 35}{9(x-2)} = 2 + \frac{1}{9(x-2)} \in (2, \infty) = G_2$.

b) Se arată că f este bijectivă şi că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in G_2$.

c) Dacă $x, y \in (\alpha, \infty)$ şi $\alpha \geq 2$, atunci $x * y = 3(x-2)(y-2) + 6(\alpha - 2) + \alpha \geq \alpha$, deci G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$".

Soluție

1. a) Din primele două ecuații rezultă că dacă $(x_0, y_0, 0, 0)$ este soluție, atunci $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{3}$. Din a treia ecuație rezultă $p = -2$.

b) Matricea sistemului, notată *A*, conține minorul $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A \geq 2,\ \forall\, m, n \in \mathbb{R}$.

c) Dacă $\operatorname{rang} A = 2$, orice minor de ordin 3 al matricei *A* este nul. Se obține astfel $m = 2,\ n = -12$. Alegând minorul principal $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, din teorema Rouché rezultă $p = -2$.

2. a) Se verifică prin calcul direct asociativitatea și comutativitatea. Elementul neutru este $(1, 0)$ iar simetricul unui element (q, k) este elementul $\left(\frac{1}{q}, -k\right) \in G$.

b) $(1,1) * (1,2) * \ldots * (1,10) = (1, 1 + 2 + \ldots + 10) = (1, 55)$.

c) <u>*f* morfism</u>: $f\left((q_1, k_1) * (q_2, k_2)\right) = q_1 q_2 2^{k_1 + k_2} = f(q_1, k_1) \cdot f(q_2, k_2), \forall (q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$.

<u>*f* injectivă</u>: Fie $(q_1, k_1), (q_2, k_2) \in G$, $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ și $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ impare astfel încât $f(q_1, k_1) = f(q_2, k_2)$. Dacă $k_1 \neq k_2$, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $k_1 < k_2$. Atunci, din $q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2}$, rezultă $m_1 n_2 = 2^{k_2 - k_1} m_2 n_1$, contradicție, deoarece membrul stâng este impar, iar membrul drept este par. Ca urmare, $k_1 = k_2$, de unde $q_1 = q_2$.

<u>*f* surjectivă</u>: pentru orice număr rațional $r = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}^*$, există $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ impare și $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = 2^a m_1$ și $n = 2^b n_1$. Notând $q = \frac{m_1}{n_1},\ k = a - b$, rezultă $f(q, k) = \frac{m}{n}$.

Soluție

1.a) Sistemul are soluție unică dacă determinatul matricei A a sistemului este nenul. Cum $\det A = m^2 - 6m + 5$, sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$.

b) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$ sistemul este compatibil determinat. Pentru $m = 1$, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$, adică sistemul este compatibil nedeterminat. Pentru $m = 5$ rezultă $\operatorname{rang} A = 2$ și $\operatorname{rang} \overline{A} = 3$, deci sistemul este incompatibil.

c) Pentru $m = 1$ se obține soluția $x = 1 - \alpha$, $y = \alpha$, $z = 0$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Înlocuind în relația $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$, rezultă $\alpha \in \{-2, 6\}$. Soluțiile căutate sunt $(3, -2, 0)$ și $(-5, 6, 0)$.

2.a) $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right\} = \frac{5}{12}$.

b) Comutativitatea este imediată. Asociativitatea: folosind relația $\{x+n\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, rezultă:

$(x*y)*z = \{x*y+z\} = \{\{x+y\}+z\} = \{x+y-[x+y]+z\} = \{x+y+z\}$ și

$x*(y*z) = \{x+y*z\} = \{x+\{y+z\}\} = \{x+y+z-[y+z]\} = \{x+y+z\}$.

Elementul neutru este $e = 0$, simetricul lui 0 este 0, iar simetricul oricărui element $x \in (0,1)$ este $1 - x$.

c) Ecuația se poate scrie sub forma $\{3x\} = \frac{1}{2}$. Cum $0 \le 3x < 3$, rezultă $3x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right\}$.

Soluție

1.a) $m(\sigma)=4.$

b) Prin calcul direct rezultă $\sigma^5=e,$ deci $A=\left\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\right\}.$ A are 5 elemente.

c) Cum $\tau\sigma^2=\sigma^2\tau\Rightarrow\tau\sigma^4=\sigma^4\tau,$ deci $\tau\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\tau,$ adică $\tau\sigma=\sigma\tau.$

2.a) Trebuie demonstrat că $f(x-T)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)\Rightarrow -T\in H.$

b) Fie $T_1,T_2\in H\Rightarrow f(x+(T_1+T_2))=f((x+T_1)+T_2)\overset{T_2\in H}{=}f(x+T_1)\overset{T_1\in H}{=}f(x)$, deci $T_1+T_2\in H.$

Dacă $T\in H,$ atunci $-T\in H$, deci H este subgrup al lui $(\mathbb{R},+).$

c) Din $f(T)=f(0)\Rightarrow T\in\mathbb{Z}$. Apoi, $f(x+T)=f(x), \forall T\in\mathbb{Z}.$ Astfel $H=\mathbb{Z}$.

Soluție

1.a) $\det(M)=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{vmatrix}=-4m^2+m-1$.

b) $-4m^2+m-1=-\left(4m^2-m+1\right)\neq 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

c) $\left|\det(M)\right|=\left(2m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\geq\frac{15}{16}\Rightarrow S_{ABC}\geq\frac{15}{32}$.

2.a) $M=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}=O_2$.

c) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, atunci $X^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$. $a^2,b^2\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{4}\right\}$. Cum $a^2-b^2=\hat{2}\Rightarrow a^2=\hat{1}$ și $b^2=\hat{4}$, adică $a\in\left\{\hat{1},\hat{4}\right\}$ și $b\in\left\{\hat{2},\hat{3}\right\}$. Cum $ab=\hat{3}$ rezultă soluțiile $X_1=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{4} \end{pmatrix}$.

Soluție

1.a) Cu regula lui Sarrus sau prin aplicarea proprietăților determinaților rezultă $\det A = 0$.
b) Cum $\det A = 0$, sistemul admite soluții nenule.
c) Scăzând prima ecuație a sistemului din a doua, rezultă $(b-a)(y_0 - z_0) = 0$, deci $y_0 = z_0$. Rangul matricei sistemului este egal cu 2; z este necunoscută secundară, $z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Obținem $y = \lambda,\ x = -(a+b+c)\lambda$. Cum $(1,1,1)$ soluție implică $a+b+c=-1$, soluțiile sistemului sunt $(\lambda,\lambda,\lambda)\ \lambda \in \mathbb{R}$.

2.a) Notând $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \Rightarrow A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$. În plus,

$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \neq 0 \Rightarrow A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} \in G$

b) Comutativitatea este consecință a punctului **a)**, iar asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elementul neutru este matricea $A_{1,0} = I_2$, iar inversa matricei $A_{x,y}$ este $A_{x',y'} = \begin{pmatrix} x' & iy' \\ iy' & x' \end{pmatrix}$,

cu $x' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ și $y' = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

c) Evident f este funcție bijectivă. f φ morfism: $f(x_1 + iy_1)\cdot\varphi(x_2 + iy_2) = \begin{pmatrix} x_1 & iy_1 \\ iy_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & iy_2 \\ iy_2 & x_2 \end{pmatrix} = A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} =$

$= A_{x_1x_2 - y_1y_2,\, x_1y_2 + x_2y_1}$. Concluzia rezultă din faptul că $(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Notând cu A matricea sistemului, rezultă $\det A = m^2(m-1)$. Sistemul admite soluție unică dacă și numai dacă $\det A \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

b) Dacă $m = 0$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, rang $A = 1$ și rang $\overline{A} = 2$.

Pentru $m = 1$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, rang $A = 2$ și rang $\overline{A} = 3$.

c) Fie $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ o soluție a sistemului; atunci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Scăzând a doua ecuație a sistemului din a treia, rezultă că $x_0 - y_0 + (m+1) z_0 = 1$. Din prima ecuație, conduce la $mz_0 = 0$ deci $z_0 = 0$. Rezultă $x_0 - y_0 = 1$, deci $x_0 - y_0 + 2009 z_0 = 1$.

2.a) $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

b) Din tabla adunării elementelor din H, rezultă că dacă $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$ atunci $x = y = \hat{0}$.
c) Se verifică relația $A \cdot B \in G$ pentru orice $A, B \in G$.

Asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$, iar elementul neutru este $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, condiția $a \neq \hat{0}$ sau $b \neq \hat{0}$ este echivalentă cu $\det A \neq \hat{0}$, conform punctului anterior.

Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, cu $c = (\det A)^{-1} \cdot a$, $d = (\det A)^{-1} \cdot (-b)$.

Soluție

1.a) Se înlocuiesc $x_0 = 2,\ y_0 = 2,\ z_0 = 1$ în ecuațiile sistemului și se obține $m = 3$ și $n = 2$.
b) Sistemul admite soluție unică dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Cum $\det A = 3 - n$, rezultă $n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
c) Dacă $n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, sistemul este compatibil determinat. Dar sistemul trebuie să fie compatibil nedeterminat; ca urmare, $n = 3$. Rangul matricei sistemului este 2 și deoarece sistemul este compatibil, rangul matricei extinse trebuie să fie 2. Obținem $m = 1$.

2. a) Fiecare matrice din *G* este determinată de o pereche $(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, deci *G* are 9 elemente.

b) Înmulțirea este corect definită pe *G*: $\begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & c & d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+c & b+d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$.

Înmulțirea matricelor este asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$, deci și pe *G*. Elementul neutru este I_3, iar inversa matricei $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{1} & -a & -b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

c) Dacă $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+a & b+b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $X^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+a+a & b+b+b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = I_3$.

Soluție

1.a) $\det A = -5m$

b) Sistemul admite soluții nenule dacă determinantul matricei sistemului este nul, deci $m = 0$

c) Pentru $m = 0$ sistemul are soluții nebanale: $x = \lambda,\ y = 3\lambda,\ z = -5\lambda,$ unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Înlocuind, rezultă $\dfrac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2} = \dfrac{7}{3}$.

2.a) $f(i) = b - 5 + i(a+4) = 0,$ de unde $a = -4,\ b = 5.$

b)

$$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 + (x_4-1)^2 = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = \left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right)^2 - 2\sum_{1\le k<j\le 4} x_k x_j - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = 0.$$

c) Dacă polinomul are toate rădăcinile reale, ținând cont de relația obținută la punctul anterior, rezultă $(x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 = (x_3-1)^2 = (x_4-1)^2 = 0,$ deci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1.$ Obținem $a = -4,\ b = 1.$

Soluție

1.a) Determinantul matricei sistemului este $\Delta = ab(b-a)(a-1)(b-1)$.

b) Sistemul este compatibil determinat dacă $\Delta \neq 0$. Rezultă $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $a \neq b$.

c) Evident $\text{rang}\, A \leq \text{rang}\, \overline{A}$. Coloana termenilor liberi este aceeaşi cu a treia coloană a matricei sistemului, deci orice minor al matricei extinse este şi minor al matricei sistemului. Ca urmare, $\text{rang}\, \overline{A} \leq \text{rang}\, A$, deci $\text{rang}\, A = \text{rang}\, \overline{A}$, adică sistemul este compatibil, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

2.a) $f^2 = \left(\hat{2}X + \hat{1}\right)^2 = \hat{1}$, polinom care are gradul 0.

b) Cum $f \cdot f = \hat{1}$, f este element inversabil al inelului $\left(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot\right)$ şi $f^{-1} = f$.

c) Fie $g \in \mathbb{Z}_4[X]$, $g = ax + b$, $a \neq \hat{0}$, astfel încât $g^2 = \hat{1}$. Rezultă $\begin{cases} a^2 = \hat{0} \\ \hat{2}ab = \hat{0} \\ b^2 = \hat{1} \end{cases}$. Obținem $b = \hat{1}$ sau $b = \hat{3}$ şi $a = \hat{2}$.

Obținem două polinoame cu proprietatea cerută în enunț: $g_1 = \hat{2}X + \hat{1}$ şi $g_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.

Soluție

1.a) Se verifică prin calcul.

b) $A^3 = 9A \Rightarrow I_3 + A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(I_3 + A^3\right) = 28.$

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$. Egalând elementele aflate pe poziții corespondente, obținem concluzia.

2.a) $\varepsilon^2 = -1 - \varepsilon \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

b) $(a+b\varepsilon)\left(a+b\varepsilon^2\right) = a^2 - ab + b^2 \neq 0$, deci inversul lui $a+b\varepsilon$ este $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2} - \frac{b}{a^2-ab+b^2}\varepsilon \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

c) $\left(a^2-ab+b^2\right)\left(c^2-cd+d^2\right) = \left|(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)\right|^2 = x^2 - xy + y^2$, unde $x = ac - bd \in \mathbb{Z}$ și $y = ad + bc - bd \in \mathbb{Z}$.

Soluție

1. a) $\det(A) = 3m^2 + m - 1$.

b) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6} \right\}$.

c) $A^{-1} = A^* \Leftrightarrow \det(A) = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{ -1, \frac{2}{3} \right\}$.

2. a) Rădăcinile lui *f* sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}$.

b) $g(\hat{0}) = g(\hat{1}) = g(\hat{2}) = \hat{2} \neq \hat{0}$. Cum gradul lui g este 3 rezultă concluzia.

c) $h(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}_3 \Leftrightarrow (h - g) \vdots (X^3 - X) \Leftrightarrow h = (X^3 - X) \cdot c + g$ cu $c \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ de unde $h = \hat{2}X^3 + X + \hat{2}$ sau $h = g$.

Soluție

1.a) Fie A matricea sistemului: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}A=3$. Avem $\operatorname{rang}\overline{A}=3=\operatorname{rang}A$, deci sistemul este compatibil.

b) Rezolvând sistemul obținem: $x_1=\dfrac{1+a-b-2\lambda}{2}$, $x_2=\dfrac{1-a-b-2\lambda}{2}$, $x_3=b+\lambda$, $x_4=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Punând condițiile ca x_1,x_2,x_3,x_4 și x_1+x_2 să fie în progresie aritmetică, rezultă $a=b=-\dfrac{1}{18}$

c) Din $x_4>0\Rightarrow\lambda>0$. Apoi, $x_2>0\Rightarrow 1-a-b-2\lambda>0$, deci $1-a-b>2\lambda>0\Rightarrow a+b<1$

2. a) $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3=4.$

b) Presupunând că f are o rădăcină întreagă a, atunci a este divizor al termenului liber al polinomului, adică $a\in\{-1,1\}$. Cum $f(-1)=-8,\ f(1)=4,$ nici 1, nici –1 nu sunt rădăcini ale lui f, deci f nu are rădăcini întregi.

c) $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=(x_1+x_2+x_3)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right).$

Avem $x_1+x_2+x_3=3$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-1$.

Avem $x_k^3-3x_k^2+5x_k+1=0,\ k=1,2,3$ și adunând, rezultă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-21.$

În concluzie, $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=18.$

Soluție

1. a) $\sum_{j=1}^{3}\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}+\sum_{j=1}^{3}b_{ij}=0,\ \forall i\in\{1,2,3\}$.

b) Dacă $A\in M\Rightarrow \det(A)=0.$

c) Fie $A=\left(a_{ij}\right)\in M$ şi $A^2=\left(c_{ij}\right)$ unde $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}a_{kj}$. Pentru fiecare $i\in\{1,2,3\}$ avem

$c_{i1}+c_{i2}+c_{i3}=\sum_{k=1}^{3}\left(a_{ik}a_{k1}+a_{ik}a_{k2}+a_{ik}a_{k3}\right)=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\left(a_{k1}+a_{k2}+a_{k3}\right)=0$.

2.a) $x_{1,2}=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

b) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\ \mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\Rightarrow\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\cap\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Fie

$x=a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{3}$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}\Rightarrow b\sqrt{2}-d\sqrt{3}\in\mathbb{Z}$ şi prin ridicare la pătrat rezultă $bd\sqrt{6}\in\mathbb{Z}\Rightarrow bd=0$.
Deci $b=0$ sau $d=0$, de unde $x\in\mathbb{Z}$.

c) Presupunem că există $f:\mathbb{Z}\sqrt{2}\to\mathbb{Z}\sqrt{3}$ morfism de inele. Cum $f(1)=1$ rezultă că $f(2)=f(1)+f(1)=2$.
Atunci $2=f\left(\sqrt{2}^{2}\right)=f^{2}\left(\sqrt{2}\right)$, deci $f\left(\sqrt{2}\right)=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

Soluție

1. a) $A^2 = 5A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2x & 10 \\ 5x & 2x+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5x & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2.$

b) Pentru $x = 2$, conform punctului anterior, rezultă $A^2 = 5A.$ Prin inducție, rezultă $A^n = 5^{n-1}A,$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*,$ de unde $A^{2009} = 5^{2008}A.$

c) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x+2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}\left(A + A^t\right) = 1$ dacă și numai dacă $\det\left(A + A^t\right) = 0,$ adică $x \in \{-6, 2\}.$

2.a) $f(-1) = a^2 - 2a + 7 = 10 \Rightarrow a \in \{-1, 3\}.$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)^2 - 2\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j$. Cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - a$ și $\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = \frac{a^2 + 3}{2}$,

rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2a - 2$

c) Avem $\sum_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 = 3\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i^{\ 2} - 2\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = -a^2 - 6a - 9$. Dacă f are toate rădăcinile reale

$\Rightarrow \sum_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 \ge 0 \Rightarrow -a^2 - 6a - 9 \ge 0 \Rightarrow a = -3$.

Egalitatea are loc dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{1 - a}{4} = 1$. Obținem $a = -3, b = -8, c = 2$.

Soluție

1.a) $A\cdot(X+Y)\cdot A^t = A\cdot X\cdot A^t + A\cdot Y\cdot A^t = 0_2 \Rightarrow X+Y\in G$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$; atunci $A\cdot X\cdot A^t = (a+b+c+d)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Este evident că dacă $A\cdot X\cdot A^t = 0_2$, atunci $a+b+c+d=0$.

c) $\det X = 0 \Rightarrow X^2 = tX$, unde $t=\mathrm{tr}(A)$. Prin inducție rezultă $X^n = t^{n-1}X$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$.

Atunci $A\cdot X^n\cdot A^t = t^{n-1}\left(A\cdot X\cdot A^t\right) = 0_2 \Rightarrow X^n\in G$.

2. a) Prin împărțire se obține câtul X^2-4X+5 și restul 0.

b) $f=\left(X^2-2X+5\right)\left(X^2-4X+5\right)$. Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$, $x_{3,4}=2\pm\mathrm{i}$, niciuna nefiind reală.

c) Prin calcul direct, folosind rezultatele obținute la punctul anterior, rezultă $|x_k|=\sqrt{5}$, $k=1,2,3,4$.

Soluție

1.a) Prin calcul direct rezultă $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A \cdot A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Cum $X^3 = AX = XA$, rezultă $a = d$ și $b = 0$. Înlocuind apoi $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ în ecuația $X^2 = A$, rezultă $a^2 = 1$ și $ac = 1$. Obținem soluțiile $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.a) Restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este $f(-1) = b - 5$, care nu depinde de a.

b) Fie $g = f - X$; atunci $X^2 - X \mid g$. Rezultă $g(0) = g(1) = 0$, de unde $a = 0$, $b = 0$.

c) $(X-1)^2 \mid f \Rightarrow f(1) = f'(1) = 0$. Avem $f(1) = 0 \Rightarrow 2a + b + 1 = 0$ și $f'(1) = 0 \Rightarrow 11a - 15 = 0$; obținem $a = \frac{15}{11}$, $b = -\frac{41}{11}$.

Soluție

1.a) $\text{Det}(A) = abc \neq 0$.

b) Prin inducție după *n*.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1} - b^{-1} & a^{-1} - b^{-1} \\ 0 & b^{-1} & b^{-1} - c^{-1} \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

2.a) Pentru $x = -1$ rezultă $f(-1) = f^2(-1) + 3f(-1) + 1$, deci $f(-1) = -1$.

b) Restul împărțirii polinomului f la $X - 5$ este $f(5)$. Pentru $x = 0$ rezultă $f(1) = f^2(0) + 3f(0) + 1 = 1$.

Pentru $x = 1$ rezultă $f(5) = f^2(1) + 3f(1) + 1 = 5$.

c) Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 0$ *şi* $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1, \forall n \geq 0$.

Prin inducție rezultă $f(a_n) = a_n$ şi $a_n < a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci şirul are o infinitate de termeni diferiți. Ca urmare, polinomul $h = f - X$ se anulează în fiecare dintre termenii şirului, adică de o infinitate de ori, deci $f - X = 0$, adică $f = X$.

Soluție

1.a) $2A_2 = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(2A_2) = 12.$

b) $A_3 + xI_3 = \begin{pmatrix} 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 1 & 2+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + xI_3) = (x+4)(x+1)^2$. $\text{Det}(A + xI_3) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -1\}$.

c) $\det A_4 = 5 \neq 0$, deci A_4 este inversabilă. Fie $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Prin calcul direct se arată că $AB = BA = I_4$, deci $B = A^{-1}$.

2.a) $x_2 = 1 + i \Rightarrow x_3 = 1 - i$. Folosind relațiile lui Viete, obținem $a = x_1 + x_2 + x_3$, $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ şi $c = x_1x_2x_3$, adică $a = 4, b = 6, c = 4$.

b) Presupunem că există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ şi $(X-2)^2$ sunt egale cu $r \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad}\, r \leq 1$. Fie $g = f - r$; atunci $\text{grad}\, g = 3$. Atunci $(X-1)^2 \mid g$ şi $(X-2)^2 \mid g$. Rezultă $(X-1)^2(X-2)^2 \mid g \Rightarrow \text{grad}\, g \geq 4$, contradicție

c) Presupunem că $x_1 \leq 0$. Pe rând, rezultă $x_1^3 \leq 0, -ax_1^2 \leq 0, bx_1 \leq 0, -c < 0$. Adunând, obținem $0 = f(x_1) < 0$, contradicție.

Soluții

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$. Se verifică prin calcul că $A^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2$.

b) $\operatorname{tr}(A) = 0 \Rightarrow A^2 = -\det A \cdot I_2$. Atunci $A^2 \cdot B = B \cdot A^2 = -(\det A)\cdot B$

c) $A^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow A^2B - \operatorname{tr}(A)\cdot AB + (\det A)\cdot B = 0_2$ (prin înmulțire la dreapta cu B).
$A^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow BA^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot BA + (\det A)\cdot B = 0_2$ (prin înmulțire la stânga cu B).
Scăzând relațiile de mai sus rezultă $\operatorname{Tr}(A)\cdot(AB - BA) = 0_2 \Rightarrow AB = BA$.

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le 4} x_i x_j = 10$.

b) $(X-1)(X-3) \mid f \Rightarrow f(1) = f(3) = 0$. Obținem $a = -14,\ b = 6$.

c) Fie u, v cele două rădăcini duble ale polinomului f; din relațiile lui Viète rezultă $2(u+v) = 6$ şi $u^2 + v^2 + 4uv = 13$. Atunci $uv = 2$; $u = 1$, $v = 2$, de unde $a = -12,\ b = 4$.

Soluție

1.a) $\det\left(A\cdot A^t\right)=\det(A)\cdot\det\left(A^t\right)=\det^2(A)\geq 0.$

b) $A\cdot A^t=A^t\cdot A\Leftrightarrow ac+bd=ab+cd\Leftrightarrow(a-d)(c-b)=0$.

c) $A-A^t=\begin{pmatrix}0 & b-c\\ c-b & 0\end{pmatrix}=(b-c)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Cum $\left(A-A^t\right)^{2008}=(b-c)^{2008}\cdot I_2$, rezultă $\left(A-A^t\right)^{2009}=(b-c)^{2008}\cdot\left(A-A^t\right)\Rightarrow A-A^t=O_2$ sau $(b-c)^{2008}=1$. Se obține $b-c\in\{0,1,-1\}$, deci $|b-c|\in\{0,1\}$.

2.a) $x=\hat{2}^{-1}\cdot\hat{3}=\hat{5}$.

b) $x^2\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\right\}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_7$, deci $2x^2\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\right\}$.

c) $f(x+y)=\hat{2}(x+y)=\hat{2}x+\hat{2}y=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}_7$. $f(x)=f(y)\Rightarrow\hat{2}x=\hat{2}y\Rightarrow x=y$, deci f este injectivă. Cum $\mathbb{Z}_7$ este mulțime finită rezultă că f este surjectivă.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Matricea sistemului A conține un minor nenul de ordin 2 (spre exemplu $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$), deci $\operatorname{rang} A \geq 2$.

Dacă A are rangul 2, atunci $\det A = 0$ (singurul minor de ordin 3). Avem $\det A = 2(m-1)$, deci $\det A = 0 \Rightarrow m = 1$.

b) Dacă $x_0 + y_0 + z_0 = 4$, din a treia ecuație a sistemului rezultă $x_0 = 2$, $y_0 + z_0 = 2$. Folosind şi a doua ecuație rezultă $y_0 = z_0 = 1$. Atunci, din prima ecuație a sistemului rezultă $m = \frac{1}{2}$

c) Sistemul are soluție unică dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

Aplicând regula lui Cramer, rezultă $x = -\frac{1}{m-1}$, $y = 1$, $z = -\frac{m}{m-1}$. $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3 \Rightarrow m-1 \mid 1 \Rightarrow m \in \{0, 2\}$

2.a) $X + 1 \mid f \Rightarrow f(-1) = 0$. Cum $f(-1) = 5 + p \Rightarrow p = -5$.

b) Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este rădăcină dublă, atunci $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ .Din $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4(\alpha^3 - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$.

Din $f(\alpha) = 0 \Rightarrow p = 3$.

c) Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = 0$, dacă polinomul ar avea toate rădăcinile reale, atunci acestea ar fi toate egale cu 0, contradicție.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}.$

b) $f(0)=\det\left(A\cdot A^t+0\cdot B\right)=\det\left(A\cdot A^t\right)=\det(A)\cdot\det\left(A^t\right)=(\det A)^2\geq 0.$

c) Fie $f(x)=\begin{vmatrix} a^2+b^2+x & ac+bd+x \\ ac+bd+x & c^2+d^2+x \end{vmatrix}=\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd\right)x+(ad-bc)^2.$

Afirmația din enunț este adevărată: $m=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$, $n=(ad-bc)^2$.

2.a) Pentru $q=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G.$

b) Fie $x=\cos q\pi+i\sin q\pi,\ y=\cos r\pi+i\sin r\pi,\ q,r\in\mathbb{Q}$. Atunci $xy=\cos(q+r)\pi+i\sin(q+r)\pi\in G.$

c) Rădăcinile polinomului f sunt numerele complexe $z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3},\ k=0,1,\ldots,5.$

Cum $\frac{k}{3}\in\mathbb{Q}$, pentru orice $k=0,1,\ldots,5$, rezultă că f are toate rădăcinile în G.

Soluție

1.a) $I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (I_2 + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = I_2 + A.$

b) $A^2 = -A$, $A^3 = A^2 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = A$. Prin inducție matematică rezultă că $A^n = (-1)^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\left\{A^n \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{-A, A\}$.

c) $X^3 = A \Rightarrow \det\left(X^3\right) = \det(A) \Rightarrow \det(X) = 0.$ Dacă $t = tr(X) \Rightarrow X^3 = t^2 X$. Din $t^2 X = A \Rightarrow t^3 = -1$, deci $t = -1$. Deci $X = A$.

2.a) $f(1) + f(-1) = a_n\left(1 + (-1)^n\right) + a_{n-1}\left(1 + (-1)^{n-1}\right) + \ldots + a_1\left(1 + (-1)\right) + 2a_0$.

Avem $1 + (-1)^k \in \{0, 2\}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deci $f(1) + f(-1)$ este număr par

b) Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină întreagă *k*; atunci $f(x) = (x - k)g(x)$, unde g este un polinom cu coeficienți întregi. $f(2) = (2 - k)g(2)$ este impar, deci $2 - k$ este impar.
$f(3) = (3 - k)g(3)$ este impar, deci $3 - k$ este impar. Atunci $2 - k + 3 - k = 5 - 2k$ este par, contradicție.

c) Dacă polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ ar putea fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi, unul dintre aceste polinoame ar fi de gradul 1, deci g ar avea o rădăcină rațională $x_0 = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1, (p, q) = 1,$ astfel încât $p | 1$ și $q | 1$. Rezultă $x_0 \in \{-1, 1\}$.

Pentru $x_0 = -1 \Rightarrow g(-1) = 3a + 1 = 0$ dacă şi numai dacă $a = -\frac{1}{3},$ care nu este număr întreg, contradicție.

Pentru $x_0 = 1 \Rightarrow g(1) = 3a + 1 = 0$ dacă şi numai dacă $a = -\frac{1}{3},$ care nu este număr întreg, contradicție.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=-a$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+a\cdot x\right)=0$, dreapta $y=-a\cdot x$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

b) $x=\ln a$ este punct de minim.

c) Din ipoteză avem că $f(x)\geq f(0),\forall x\in\mathbb{R}$, deci $x=0$ este punct de minim pentru f. Din T. Fermat deducem că $f'(0)=0\Leftrightarrow a=1$; se verifică faptul că $a=1$ convine.

2.a) F este derivabila pe $(0;\infty)$. $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\cdot\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}=f(x),x>0$.

b) G primitivă $\Rightarrow$ G este derivabilă. $G'(x)=f(x)\geq 0,\forall x\geq 1\Rightarrow$ concluzia.

c) Aria = $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|f(x)\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=-F(x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+F(x)\Big|_{1}^{e}=-2\sqrt{e}-\dfrac{6}{\sqrt{e}}+8$.

Soluții

1.a) Se demonstrează prin inducție matematică.

b) $a_{n+1}-a_n=-a_n\cdot\sqrt{a_n}<0\Rightarrow$ şirul dat este strict descrescător.

c) Cum $a_k^2<a_k\sqrt{a_k}=a_k-a_{k+1},\ \forall k\in\mathbb{N}^*$, însumând se deduce relația cerută.

2.a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$. $F'(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=f(x)$.

b) Aria cerută este $A=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1=\ln 3$.

c) Limita cerută este $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(F(n)-F(-n)\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Soluții

1.a) $f'(x)=\frac{36\cdot x^2-1}{x}, x>0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{6}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{6},\infty\right)$.

b) Din **a)** avem că $f(x)\geq f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\ln 6, \forall x>0$, deci $a\in\left(-\infty,\frac{1}{2}+\ln 6\right]$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$,utilizând **a)** avem ca pentru $m<\frac{1}{2}+\ln 6=m_0$ ecuația are 0 rădăcini reale, pentru $m=m_0$ ecuația are o rădăcină reală, iar pentru $m>m_0$ ecuația are două rădăcini reale.

2.a) Funcția este continuă, deci are primitive. Daca F este o primitivă pentru f_a, atunci $F'(x)=f_a(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Aşadar funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^3\frac{1}{|x-2|+3}dx=\int_0^2\frac{1}{5-x}dx+\int_2^3\frac{1}{x+1}dx=\ln\frac{20}{9}$.

c) $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3\frac{1}{a-x+3}dx=\lim\limits_{a\to\infty}\ln\frac{a+3}{a}=0$.

Soluții

1.a) $y=0$ este asimptota orizontală la ∞ şi la $-\infty$.
Dreptele $x=0,\ x=-1$ sunt asimptote verticale.

b) $f'(x)=\dfrac{-2\left(3x^2+3x+1\right)}{x^3\left(x+1\right)^3}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, de unde se obține concluzia.

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Limita cerută este $\dfrac{1}{e}$

2.a) $I_1=\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=1-\ln\dfrac{3}{2}$.

b) $I_n=\int_1^2\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_1^2 dx=1$.

c) $I_n=\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{1+x^n}\right)dx=1-\int_1^2\dfrac{1}{1+x^n}dx$, iar $0\le J_n=\int_1^2\dfrac{1}{1+x^n}dx\le\int_1^2\dfrac{1}{x^n}dx=\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\Rightarrow J_n\to 0$
$\Rightarrow I_n\to 0$.

Soluții

1.a) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x\cdot(x+1)^2}$, $x>0$

b) $f'(x)=\frac{2}{9}\Leftrightarrow 2x^3-5x^2+20x-9=0\Leftrightarrow(2x-1)\left(x^2-2x+9\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+\frac{2}{3}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2};-\ln 2+\frac{2}{3}\right)$ este punctul căutat.

c) Din subpunctul **a)** deducem ca $f'\left(x\right)>0,\ \forall x>1$. Deoarece funcția *f* este strict crescătoare pe $[1,\infty)$ și $f(1)=0$, rezultă că $f\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\left[1;\infty\right)$, de unde se deduce inegalitatea de demonstrat.

2.a) Se arată că *f* este strict descrescătoare. Se aplică teorema de medie (sau teorema lui Lagrange pentru o primitivă a funcției *f*).

b) $\int_1^n f(x)dx=\int_1^n x^{-2}dx=\left.\frac{-1}{x}\right|_1^n=1-\frac{1}{n}$. Limita cerută este egală cu 1.

c) Deoarece $\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$ adunând inegalitățile de la **a)** obținem:

$\sum_{k=2}^{n} f(k)\leq\int_1^n f(x)dx\Rightarrow a_n-f(1)\leq\int_1^n f(x)dx\Rightarrow a_n\leq\int_1^n f(x)dx+1\to 2$, deci şirul este mărginit superior.

Şirul fiind şi crescător , este convergent.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=e^{x\ln x}.(x\ln x)'=f(x)\cdot(\ln x+1), x>0$.

b) Funcția f este descrescătoare pe $\left(0;\frac{1}{e}\right]$ și crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$, deci ea este marginită inferior de numărul $f\left(\frac{1}{e}\right)$. Minimul cerut este $e^{\frac{-1}{e}}$.

c) $f''(x)=f(x)\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0$, deci f este convexă pe $(0,\infty)$.

2.a) $\int_0^1 g_2(x)\,dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\frac{x^4}{1+x}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$.

b) $x\in[0;1]\Rightarrow 0\le\frac{x^{2n}}{1+x}\le x^{2n}$ și integrând aceste inegalități de la 0 la 1 , obținem inegalitățile cerute.

c) Integrând functia g_n obținem:

$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-\ldots-x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1+x}\right)dx\Rightarrow\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$, utilizând și **b)** găsim că limita este $\ln 2$.

Soluții

1.a) $x=0$ este asimptota verticala. Functia *f* nu admite alte asimptote, pentru că f este continuă, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

b) Aplicăm T.Lagrange funcției f pe $[k,k+1]$ și stabilim inegalitățile cerute.

c) Adunând inegalitățile de la **b)** obținem $x_n > \ln(n+1)-\ln n > 0, n\in\mathbb{N}^*$. Apoi, $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$ și folosind **b)** se deduce că șirul este descrescător.

2.a) $F'(x)=f(x), \forall x>-1 \Leftrightarrow \frac{a}{x+1}+\frac{2bx}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}, \ \forall x>-1 \Leftrightarrow a=-1, b=\frac{1}{2}, c=1.$

b) $\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \left(-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}(x)\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}.$

c) $F'(x)=f(x),\ x>-1$. Observăm că $F'(x)<0, x\in(-1;0)$ și $F'(x)>0, x>0$, de unde deducem monotonia.

Soluții

1.a) $f'(x)=1-\sin x\geq 0$, deci are loc concluzia.

b) Se demonstrează prin inducție, folosind monotonia funcției.

c) Şirul este crescător şi folosind **b)**, şirul este convergent. Concluzia rezultă trecând la limită în relația de recurență.

2.a) $I_1=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\left(\cos x-1\right)dx\leq 0$, de unde se obține concluzia.

c) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cdot\cos^{n-1}xdx$; $I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\cos^{n-2}xdx$; $I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$,

deci $nI_n=(n-1)I_{n-2}\Rightarrow nI_nI_{n-1}=(n-1)I_{n-1}I_{n-2}=...=1I_1I_0=\frac{\pi}{2}$.

Soluții

1.a) $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Din ipoteză rezultă că $x_n = \sin x_n + n \geq n-1$. Rezultă că șirul (x_n) este nemărginit.

c) $\dfrac{x_n}{n} \in \left[\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n+1}{n}\right]$. Limita cerută este egală cu 1 (teorema cleștelui).

2.a) $\int_0^2 \dfrac{1-x^2}{1-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)dx = \left(x + \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{8}$.

b) $t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq g_n(t) \leq g_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ deoarece funcția g_n este crescătoare pe $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Rezultă că $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(t)dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2^{n-1}}dt = \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Avem : $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1-x^n}{1-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}\right)dx = \left(x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 2^2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^3} + ... + \dfrac{1}{n\cdot 2^n}$.

Limita cerută este $-\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x)dx \to -\ln\dfrac{1}{2} = \ln 2$.

Soluții

1.a) $f'(x) = \text{arctg}x - \dfrac{x}{x^2+1}$; $f''(x) = \dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \geq 0$, deci f este convexă.

b) $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ este crescătoare. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \dfrac{\pi}{2}$, se obține concluzia.

c) $f'(0)=0$ și f' crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \leq 0$ pentru $x<0$; $f'(x) \geq 0$ pentru $x>0$. Deducem că $x=0$ este punct de minim global pentru f, deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln 2.$

b) $x \in [0;1] \Rightarrow \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n$. Se integrează inegalitatea și se obține cerința problemei .

c) $I_n \geq 0,$ deoarece funcția de integrat este pozitivă. Folosind **b)** și teorema cleștelui se deduce că limita cerută este egală cu 0.

Soluții

1.a) Avem că $f_s'(0) = -\frac{3}{4}$ și $f_d'(0) = \frac{1}{4}$, deci f nu e derivabilă în $x = 0$.

b) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}, x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \\ \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}, x \in (0, \infty) \end{cases}$; $x = -3$ este maxim și $x = 0$ este minim.

c) Şirul lui Rolle:

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$f(x) - m$	$-\infty$	$-m - e^3$	$-\infty \mid +\infty$	$\frac{1}{2} - m$	$+\infty$

pentru $m < -e^3 \Rightarrow 2$ rădăcini; $m = -e^3 \Rightarrow$ o rădăcină, $x = -3$; $m \in \left(-e^3, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ nicio rădăcină;

$m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ o rădăcină, $x = 0$; $m > \frac{1}{2} \Rightarrow 2$ rădăcini.

2.a) $I = \frac{13}{24} - \cos 1$.

b) $g'(x) = \dfrac{-\sin x}{x} < 0$, $\forall x \in (0,1]$, deci are loc cerința problemei.

c) Avem $\dfrac{\sin t}{t} \geq 1 - \dfrac{t^2}{6}$, pentru $t > 0$, deci $g(x) \geq \int_x^1 \left(1 - \frac{t^2}{6}\right) dt = \frac{17}{18} - x + \frac{x^3}{6}$.

Atunci , limita cerută $L \geq \frac{17}{18} > 0,9$.

Soluții

1.a) $x_n \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + ... + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Folosind o regulă a lui L'Hospital, limita cerută este egală cu 0.

c) $f'(x) = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$. Considerăm $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = x-(x+1)\ln(x+1)$ și avem $g'(x) = -\ln(x+1) < 0,\ \forall x>0$, deci $g(x) < g(0) = 0,\ \forall x > 0$ adică $f'(x) < 0,\ \forall x > 0$.

2.a) Integrând prin părți se obține $f(2) = 1-\frac{2}{e}$.

b) $f(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \le \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.

c) $f(x+1) = \int\limits_0^1 \left(-e^{-t}\right)' \cdot t^x dt = -e^{-t}\cdot t^x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt = -\frac{1}{e} + x\cdot f(x),\ x > 1$.

Soluții

1.a) $y = x+1$ este asimptota oblică spre ∞.

b) Deoarece $x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$. Derivând relația $f^3(x)=x^3+3x^2-4$, obținem concluzia.

c) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}},\ \forall x\neq 1, x\neq -2.$ Cum f continuă în $x_0=-2$ rezultă $f_s'(-2)=+\infty,\ f_d'(-2)=-\infty$.

2.a) $F_1(x)=\int_0^x\left(-e^{-t}\right)'\cdot t dt=1-(x+1)\cdot e^{-x}$.

b) $F_n'(x)=x^n\cdot e^{-x}, x>0$; $F_n''(x)=x^{n-1}\cdot e^{-x}(n-x),\ x>0$, deci punctul de inflexiune este $x=n$.

c) $F_2(x)=\int_0^x e^{-t}t^2dt=\dfrac{-x^2}{e^x}-\dfrac{2x}{e^x}-\dfrac{2}{e^x}+2$, de unde rezultă că limita cerută este egală cu 2.

Soluții

1. a) $f_n'(x) = n\sin^{n-1} x\cos x$, apoi se obține relația cerută.

b) $f_n''(x) = n\sin^{n-2} x\left(n-1-n\sin^2 x\right)$; $f_n''(x_n) = 0, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow n;\ \sin^2 x = n-1 \Rightarrow \sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

c) $L = \lim_{n\to\infty} (\sin x_n)^n = \lim_{n\to\infty} (1+\sin x_n - 1)^{\frac{1}{\sin x_n - 1}\cdot n\cdot(\sin x_n - 1)}$; $L = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-1\right)\cdot n} = e^{-\frac{1}{2}}$.

2.a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = \frac{(2x+a)\left(x^2+1\right)-\left(x^3+ax^2+5x\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = f(x)$.

b) Aria $= \int_1^2 f(x)dx = \left.\frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}\right|_1^2 = \frac{13}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

c) Cu schimbarea de variabilă $t = -x$, a doua integrală devine $\int_{-2}^{0} F(x)dx = \int_0^2 F(-t)dt$.
Relația din ipoteză devine

$$\int_0^2 (F(x) - F(-x))dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 \frac{2ax}{\sqrt{x^2+1}}dx = 2 \Leftrightarrow a\cdot\left.\sqrt{x^2+1}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Soluții

1.a) $f_n'(x) = n\cdot\left(x^{n-1}-1\right)$, $f_n'(x)<0$, pentru $x\in[0,1)$; $f_n'(x)>0$, pentru $x>1$, de unde rezultă concluzia.

b) f_n este continuă, strict descrescătoare pe $[0,1]$ și $f_n(0)\cdot f_n(1)<0 \Rightarrow$ o rădăcină în $(0,1)$.

f_n este continuă, strict crescătoare pe $[1,\infty)$, $f_n(1)<0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\infty \Rightarrow$ o rădăcină în $(1,\infty)$.

c) $f_n\left(\frac{2}{n}\right)<0$, $f_n(0)>0$, deci $a_n\in\left(0,\frac{2}{n}\right)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

2.a) $I_0 = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1$, deci $I_0=\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{2n}+I_{2n-2}=\int_0^1 \frac{x^{2n-2}\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$; $I_{2n}+I_{2n-2}=\frac{1}{2n-1}$, $n\geq 2$.

c) Din **b)** rezultă $I_{2n}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}-I_0$. Din $0\leq I_n\leq\int_0^1 x^n dx\leq\frac{1}{n+1}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$, de unde concluzia.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Funcția este derivabila pe $\mathbb{R}-\{0\}$ și $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$.

b) $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Limita cerută este egală cu 0.

c) Știm că $\sin t\le t,\ \forall t\ge 0$, de unde $0\le f(x)\le x^2\cdot\frac{1}{x^2}=1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2.a) $\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{3}$.

b) Cu substituția $1-x=t$,se obține $\int_0^1 x(1-x)^n dx=\int_0^1\left(t^n-t^{n+1}\right)dt=\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)\Bigg|_0^1$, de unde rezultă cerința.

c) $\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx=-n\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\frac{-n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}$, de unde rezultă că limita cerută este $1-\frac{1}{e}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se demonstrează prin inducție.

b) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x^5{}_n - x_n}{4} < 0$. Şirul fiind descrescător şi mărginit este convergent.

c) Avem ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^4{}_n + 3}{4} = \dfrac{3}{4}$. Din $\dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ şi relația anterioară, se deduce că limita cerută este $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

2. a) Din ipoteză avem ca $x^2 \cdot f(x) = x \cdot \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. $I = \int_0^\pi x \sin x dx = -\int_0^\pi (\cos x)' x dx$.

$I = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi$.

b) Funcția $g(x) = f(x),\ x \in I - \{0\},\ g(0) = 1,\ I = [0,1]$, este continuă pe I deci integrabilă.
Cum f diferă de g doar în $x = 0$, rezultă că şi f este integrabilă pe I.

c) Avem $\dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{\sin x}{1}, \forall x \in \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Rezultă $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos 1$.

Soluții

1.a) Funcția f este continuă pe $[0,\infty)$, deci nu va avea asimptote verticale. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, dreapta $y=2$ este asimptota orizontală spre ∞.

b) Demonstrăm inductiv că $x_n>1, \forall n\in\mathbb{N}$. Apoi, $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1-x_n^2}{x_n+2}<0$ deci şirul este descrescător. Astfel şirul este convergent şi folosind recurența rezultă concluzia.

c) $y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-1$, deci şirul (y_n) este crescător. Avem $\left|x_n-1\right|=\left|f(x_{n-1})-1\right|=\dfrac{\left|x_{n-1}-1\right|}{x_{n-1}+2}\le\dfrac{\left|x_{n-1}-1\right|}{2}$, de unde $\left|x_n-1\right|\le\dfrac{x_0-1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}$. Atunci $y_n\le x_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\left|x_k-1\right|\le 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}<3$, deci şirul este şi mărginit superior.

2.a) Avem că $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx=(x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}+1$.

b) $F(x)=x\int_0^x(1+\cos t)dt=x^2+x\sin x$, de unde rezultă că F este o funcție pară.

c) Dacă $0\le x_1<x_2$, atunci $0\le\int_0^{x_1}f(t)dt\le\int_0^{x_2}f(t)dt$ deoarece f este pozitivă, deci F este crescătoare pe $[0,\infty)$. Cum F este o funcție pară, rezultă că F este descrescătoare pe $(-\infty,0]$.

Soluții

1.a) f este continuă pe D, deci în aceste puncte nu avem asimptote verticale
$f_d(-2)=-\infty,\ f_s(2)=\infty \Rightarrow x=-2, x=2$ sunt asimptote verticale.

b) $f''(x)=\dfrac{8x}{\left(4-x^2\right)^2}$,deci $x=0$ este punct de inflexiune.

c) Limita cerută este $L=\lim\limits_{x\to\infty} x^a\cdot\ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{y\searrow 0}\dfrac{1}{y^a}\cdot\ln\dfrac{2+y}{2-y}$.

$$L=\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{y^a}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{2y}{2-y}\right)}{\frac{2y}{2-y}}\cdot\frac{2y}{2-y}=\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{y^{a-1}}=\begin{cases}0, a<1\\1, a=1\\\infty, a>1\end{cases}.$$

2.a) $I=\int_0^1\left(-x+2-\dfrac{x}{x^2+4}\right)dx=\left(-\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right)\Big|_0^1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.

b) Avem că $I=\int_1^4\dfrac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\dfrac{-1}{2}\cdot\int_1^4\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)'\cdot xdx$. $I=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-x}{x^2+4}\Big|_1^4+\dfrac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big|_1^4=\dfrac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Cu substituția $f^{-1}(x)=t,\ I=\int_{\frac{4}{5}}^{2}f^{-1}(x)dx=-\int_0^1 t\cdot f'(t)\,dt=-t\cdot f(t)\Big|_0^1+\int_0^1 f(t)dt=\dfrac{7}{10}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.

Soluții

1. a) f este derivabilă pe $[0,\infty)$, $f'(x)=2e^x+6x-2$. $f'(x)\geq 0, x\geq 0$, cu egalitate dacă $x=0$, de unde se obține concluzia.

b) Pentru $x<0$, $f'(x)<0$, deci 0 este punct de minim global, de unde $f(x)\geq f(0), \forall x\in\mathbb{R}$.

c) Deoarece $f'(x)=2e^x+6x-2$, avem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x+6x-2}{2e^x+3x^2-2x+5}=1$.

2. a) $I=\int_0^1\dfrac{1}{1+t^2}dt=\operatorname{arctg}t\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

b) Cu substitutia $\dfrac{1}{t}=y\Rightarrow J=\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt=\int_x^1 f\left(\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{-1}{y^2}\right)dy=\int_1^x\dfrac{1}{t^2}\cdot f\left(\dfrac{1}{t}\right)dt=\int_1^x t^3 f(t)\,dt$.

c) $A=\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_1^x t^3 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(t^3+1\right)f(t)\,dt$.

$A=\int_1^x\dfrac{1}{1+t^2}dt=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}1$, deci limita ceruta este $\dfrac{\pi}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Limita cerută este egală cu 1.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{x}} = e^0 = 1$.

c) f' este funcție polinomială de grad 3 deci ecuația va avea cel mult 3 rădacini reale. Aplicand T. lui Rolle funcției f pe $[1,3],[3,5],[5,7]$, f' se anulează în cel puțin în 3 puncte.

2.a) Aria cerută este $A = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

b) $I = \int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+x^2\right)'\left(1+x^2\right)^{-2}dx = \frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$.

c) Șirul care ne interesează se scrie $a_n = n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) = \dfrac{3(1-x^2)(1+x^2)}{(x^4+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $x=1$ este punct de maxim, $x=-1$ este punct de minim; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Imaginea lui *f* este $\operatorname{Im} f = \left[\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$.

c) Dacă $x = y$ avem egalitate. Dacă $x \neq y$, se aplică T.Lagrange, se arată că $f'(c) \le 1$ și rezultă cerința.

2.a) Avem: $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 + x - 2)dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3 = \dfrac{41}{6}$.

b) Se descompune în fracții simple funcția de integrat și se obține $\int_{-1}^{0} \dfrac{x^2-13}{x^2-3x+2}dx =$

$\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x+2}\right)dx = -3\ln 2 - 2$.

c) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f(x^2).e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2}(x^2+2)(x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1,-1\}$. Doar $x = 0$ este punct de extrem.

Soluții

1.a) $f' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescatoare, deci f este injectivă.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, f continuă $\Rightarrow$ f surjectivă; deoarece f este bijectivă, are loc cerința problemei.

b) Din $x_n^3 + x_n + 1 = 3 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow x_n^3 + x_n - 2 = \frac{1}{n+1}$, deci $|x_n - 1| = \frac{1}{(n+1)\left(x_n^2 + x_n + 2\right)} \le \frac{1}{2(n+1)}$, pentru că $x_n > 1$, de unde rezultă concluzia.

c) $n(x_n - 1) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{x_n^2 + x_n + 2} \to 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

2.a) $f(x) = \int_0^a \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^a = \ln(a+1)$.

b) Cum $\sin t \le 1, \forall t \ge 0$, cu egalitate pentru $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, avem:

$f(x) < \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^x = \ln(x+1)$.

c) $f(2\pi) - f(\pi) = \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt < 0$, deoarece $t \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \frac{\sin t}{1+t} < 0$.

Soluții

1.a) $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, cu egalitate doar în punctele $2n\pi,\ n \in \mathbb{N}$.

b) Funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}$, deci nu are asimptote verticale. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ deci funcția f nu are asimptote orizontale. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-\sin x\right)$ și aceasta nu există, funcția nu are asimptotă oblică la ∞. Analog spre $-\infty$.

c) Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deoarece $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$. Cum $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$,

deducem că *g* este derivabilă și în *x* = 0.

2.a) *f* continuă implică faptul că *f* are primitive.

b) $I = \int_0^1 \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)dx = \left(-e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2}$.

c) $f(t) \geq 0, \forall t \in [0; x], x > 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \geq 0$. Din ipoteză rezultă că $e^{-x} \geq -x + 1 \Rightarrow 1 - e^{-x} \leq x \Rightarrow e^{-x} - e^{-2x} \leq xe^{-x}$,

deci $\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \leq e^{-x}, x > 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x} < 1$.

Soluții

1.a) $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $f''(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0,\ \ \forall x\in(0,e]$, de unde se obține concluzia.

b) Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală. Nu există alte asimptote, pentru că funcția este continuă şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

c) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}-\big(f(n+1)-f(n)\big)=f'(n+1)-f'(c_n)<0$.

2.a) Aria ceruta este $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

b) $V=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\dfrac{\pi}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{4}$.

c) $L=\lim\limits_{n\to\infty} 2\sin^2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k}{n}=1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\int_0^1\cos xdx=\dfrac{1}{2}\sin 1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. **a**) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\text{arctg}x-\lim\limits_{x\to\infty}\text{arcctg}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare.

c) $x_2=f(0)=-\frac{\pi}{2}\to x_1>x_2$ și f este strict crescătoare $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior de $-\frac{3\pi}{2}$, deci conform Teoremei lui Weierstrass este convergent.

2. **a**) g este continuă, deci are primitive, iar derivata oricărei primitive este pozitivă, deci orice primitivă este crescătoare.

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=f(x)x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{12}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$

c) $\int_0^1 xf(x)dx\leq\int_0^1\frac{\pi x}{2}dx$, de unde concluzia.

Rezolvare

1. **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

b) $x\in(-1,1)\to f'(x)=\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.\ \lim\limits_{x\nearrow 1}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{\pi}{2}.$

f nu este derivabilă în -1.

c) $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}-(x-1)\cdot\dfrac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1-x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}\geq 0\Rightarrow f$ este convexă.

2. **a)** $\left.\begin{array}{l}F'(x)=f(x)=\dfrac{x^5-1}{x-1},\ \forall x\neq 1\\ F'(1)=f(1)=5\end{array}\right\}\Rightarrow F'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x$ deci $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$. F fiind continuă, rezultă că F este surjectivă, deci conform punctului **a)** este bijectivă.

c) $\int_0^a F^{-1}(x)dx=\int_0^1 tf(t)dt=\left.\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^5}{5}+\dfrac{t^6}{6}\right)\right|_0^1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{29}{20}.$

Rezolvare

1. **a**) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=0.$

b) Funcția este continuă în punctele care nu sunt numere întregi, iar într-un punct $n\in\mathbb{Z}$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x)=0$ și $f(x)=0$. Deci f este continuă pe intervalul $[0,3]$.

c) Explicitând funcția observăm că 1 și 2 sunt puncte unghiulare și f este derivabilă pe $[0,3]\setminus\{1,2\}$.

2. **a**) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2-\sin x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2-\sin x)'}{2-\sin x}dx=-\ln(2-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2.$

b) $F'(x)=f(x)$ și $f(x)>0$ deoarece $2-\sin x\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Deci F este strict crescătoare.

c) $\frac{1}{2-\sin t}\geq\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\geq\frac{t}{3}\Big|_0^x=\frac{x}{3}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty.$

Rezolvare

1. **a)** $f_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}g(x),\ \forall x\neq -1 \Rightarrow f_n{}'(x)=\dfrac{g_n{}'(x)}{x+1}-\dfrac{g_n(x)}{(x+1)^2}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}}{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}+1}{\dfrac{9}{4}}\right]=-\dfrac{4}{9}$.

c) $f_n'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$, cu $h(x)=(x+1)g_n'(x)-g_n(x)=2nx^{2n+1}+(2n+1)x^{2n}-1$. Deoarece h' este negativă pe $(-1,0)$ şi pozitivă pe $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, iar $h(-1)=0,\ h(0)=-1,\ \lim\limits_{x\to\infty}h(x)>0$ reiese că există exact un punct $a\in(0,\infty)$, astfel încât f este strict descrescătoare pe $(-\infty,a]$ şi strict crescătoare pe $[a,\infty)$.

2. **a)** $\mathrm{I}_2=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1\dfrac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\cdot\ln 2$.

b) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{1+x^3}dx<0$.

c) $0\le \mathrm{I}_n\le\displaystyle\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{I}_n=0$.

Rezolvare

1. **a**) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=+\infty.$

b) $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x;\quad f''(x)=-x+\sin x.$

c) $f'''(x)=-1+\cos x\le 0 \Rightarrow f''$ este strict descrescătoare $\Rightarrow f''(x)\le f''(0),\ \forall x\ge 0 \to f''(x)\le 0\to$
$\to f'$ este strict descrescătoare $\to f'(x)\le f'(0),\ \forall x\ge 0$.
$f'(x)\le 0\to f$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$ şi $f(0)=0\to f(x)\le 0,\ \forall x\ge 0.$

2. **a**) $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{x^2+1}=f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

c) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ reprezintă sume Riemann asociate funcției f, diviziunilor $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$ şi punctelor intermediare $X_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă, fiind continuă, iar şirul normelor diviziunilor tinde la 0, şirul $(a_n)_n$ este convergent.

Rezolvare

1. **a**) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1=m$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\left|x^2-x\right|}+x\right)\dfrac{1}{2}=n \Rightarrow y=-x+\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

b) f este derivabilă pe intervalul $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ şi 0 şi 1 sunt puncte de întoarcere ale graficului.

c) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ şi $f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(0,1)$. Pentru $x\in(-\infty,0)$, f este strict descrescătoare, iar pentru $x\in(1,+\infty)$, f este strict crescătoare. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, deci 0 şi 1 sunt puncte de minim (şi de întoarcere), iar $\dfrac{1}{2}$ este punct de maxim.

2. **a**) $\mathrm{I}_2=\int_0^1\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=x\Big|_0^1-\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=1-\dfrac{\pi}{4}$.

b) $\mathrm{I}_{n+2}+\mathrm{I}_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{n+1}$.

c) Din (**b**) $\Rightarrow \dfrac{1}{2(n+1)}\le \mathrm{I}_n\le\dfrac{1}{2(n-1)}$, folosind monotonia lui $(\mathrm{I}_n)_{n\ge1}$. Conform criteriului cleştelui avem $\lim\limits_{n\to\infty}n\,\mathrm{I}_n=\dfrac{1}{2}$.

Rezolvare

1. a) $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$.

b) $x+2>x \Rightarrow \operatorname{arctg}(x+2)>\operatorname{arctg} x \Rightarrow f(x)>0.$

f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,-1)$ şi strict descrescător are pe intervalul $[-1,\infty)$ deci -1 este maxim global. $f(-1)=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

c) Se arată că $g'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) $\int_1^2 \frac{x^2-1+\frac{1}{1+x^2}}{x}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2.$

b) $f(x)\geq\frac{x^3}{3}-x-\frac{\pi}{2}\rightarrow\int_0^x f(t)dt\geq\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot x.$ Deci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}=+\infty.$

c) $g(x)\geq f(x),\ \forall x\in[0,1)\Rightarrow \mathrm{A}=\int_0^1(g(x)-f(x))dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}.$

Rezolvare

1. **a**) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f'$ este strict crescătoare.

b) Se poate demonstra prin calcul sau aplicând Teorema lui Lagrange.

c) Se adună relațiile de la (**b**) de la $k = 1$ până la $k = n$ și astfel se obține marginea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$. Șirul este evident crescător, deci este convergent conform Teoremei lui Weierstrass.

2. **a**) $f_1(x) = \int_0^1 t\cdot\operatorname{arctg} t = \frac{t^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} t\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x$.

b) $f_n(1) = \int_0^1 t^n\cdot\operatorname{arctg} t\, dt \leq \frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 t^n dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}$.

c) $f_n(1) = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)'\cdot\operatorname{arctg} t\, dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot f_n(1) = \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare

1. **a**) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} > 0,\ \forall x > 0.$

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ și cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x) < 0,\ \forall x > 0.$

c) $a_{n+1} - a_n = f(n)$ și, conform **b**), $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2. **a**) $f_3'(x) = x^3 \arcsin x.$

b) $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} t \cdot \arcsin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x) \cdot x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin 2x\,dx = -\frac{x}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x\,dx = -\frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$

c) Deoarece f_2 este derivabilă, deci continuă, limita cerută este $f_2(1) = \int_0^1 t^2 \arcsin t\,dt = \frac{\pi}{6}$, deoarece

$$\int_0^x t^2 \arcsin t\,dt = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} + \frac{1}{9}.$$

Rezolvare

1. **a**) $f'(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $f''(x)=\dfrac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0\Rightarrow f'$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a\le 0$ este evident, iar pentru $a>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^{-a}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{-ax^{-a-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^{a+1}}{a\left(e^x+1\right)}=0$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ln 1=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1=m$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$, deci $y=0$ este o asimptotă orizontală la $+\infty$ și $y=x$ este o asimptotă oblică la $-\infty$. Asimptotele verticale nu există, deoarece funcția este continuă pe $\mathbb{R}$.

2. **a**) $I_1=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=x^2\Big|_0^2-\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^2=\dfrac{4}{3}$

b) $\mathrm{I}_n=\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n(x-1)'\,dx=\left(2x-x^2\right)^n(x-1)\Big|_0^2-n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}(2-2x)(x-1)\,dx=$

$=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\left(-x^2+2x-1\right)dx=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n dx+2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\Rightarrow(2n+1)\mathrm{I}_n=2n\,\mathrm{I}_{n-1}$.

c) Avem $I_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ și din punctul **b)** $I_{n-1}=I_n+\dfrac{1}{2n}I_n>I_n,\ \forall n\ge 2$ (1). Astfel șirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde $l\ge 0$, iar $I_n\ge l,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Adunând relațiile (1) avem $I_1=\dfrac{1}{4}I_2+\dfrac{1}{6}I_3+\ldots+\dfrac{1}{2n}I_n\ge\dfrac{l}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$,

de unde $l\le\dfrac{2I_1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=\infty$, deducem că $l=0$.

Rezolvare

1. **a**) $f'(x)=\dfrac{4}{\left(\sqrt{3}-x\right)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\sqrt{3}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\sqrt{3},\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\sqrt{3}\Rightarrow y=-\sqrt{3}$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$. $x=\sqrt{3}$ este asimptotă verticală.

c) Avem $a_{3n}=2$ şi $a_{3n+3}=-2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirurile $\left(a_{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\left(a_{3n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au limite diferite.

2. **a**) $\mathrm{F}'(x)=f(x)\Rightarrow \mathrm{F}''(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)\Rightarrow 0$ este punct de inflexiune.

b) $\int_0^1 xf(x)dx=-\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\left(-x^2\right)' dx=\dfrac{1-e^{-1}}{2}.$

c) $\int_0^1 \mathrm{F}(x)(x)' dx=\mathrm{F}(x)\cdot x\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)x=-\dfrac{1-e^{-1}}{2}.$

Rezolvare

1. **a**) $f'(x)=3\left(x^2-1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)=3\cdot\dfrac{x^4}{1+x^2}>0.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ şi f este continuă, deci este surjectivă. Conform (**a**) f este injectivă.

c) Singura valoare pentru a este 3 şi limita este 1.

2. **a**) $\mathrm{I}_1=\int_0^1 xe^x dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=1.$

b) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n=\int_0^1 e^x\left(x^{n+1}-x^n\right)dx\le 0,$ deci $\left(\mathrm{I}_n\right)_{n\ge1}$ este descrescător şi mărginit inferior de 0.

c) $\mathrm{I}_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\left(e^x\right)' dx=e-\mathrm{I}_n-n\,\mathrm{I}_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{I}_n=e,$ deoarece $0\le I_n\le e\int_0^1 x^n dx=\dfrac{e}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Rezolvare

1. **a**) $f'(x)=2+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci f este surjectivă, iar conform punctului **a**) este injectivă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ dar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=+\infty.$

2. **a**) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x(1-x)\,dx=\dfrac{1}{6}.$

b) f este continuă pe $\mathbb{R}$ (în fiecare număr punct întreg $l_s=l_d=f(a)=0$).

c) Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(a)=\int_a^{a+1} f(x)dx$ este derivabilă și $g'(a)=f(a+1)-f(a)=0,$ deci g este constantă.

Rezolvare

1. **a)** $f'(x)=\ln x+1$. Pe intervalul $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, f este strict descrescătoare, iar intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, f este strict crescătoare.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$. Deci f nu are asimptote.

c) Din $x_{n+1}={x_n}^{x_n}$ rezultă inductiv că $x_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. De aici obținem și $x_{n+1}>x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

2. **a)** $\mathrm{I}_2=\int_0^1\frac{x^2}{4x+5}dx=\frac{1}{8}-\frac{5}{16}+\frac{25}{64}\cdot\ln\frac{9}{5}=-\frac{3}{16}+\frac{25}{64}\cdot\ln\frac{9}{5}$.

b) $4\mathrm{I}_{n+1}+5\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{x^n(4x+5)}{4x+5}dx=\frac{1}{n+1}$.

c) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n\le 0\to\frac{1}{9(n+1)}\le \mathrm{I}_n\le\frac{1}{9n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} n\mathrm{I}_n=\frac{1}{9}$.

Rezolvare

1. **a)** $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0,\ \forall x<0.$

b) $f''(x)=\frac{2}{\left(x^2+2\right)\sqrt{\left(x^2+2\right)}}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+1\right)}}=\frac{2t\cdot\sqrt{t}-(t+1)\sqrt{t+1}}{(t+1)\cdot t\cdot\sqrt{t(t+1)}}$, unde $t=x^2+1$.

Se arată că există un singur t pentru care numărătorul este 0 și $t>1$, deci două valori pentru x.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă la $-\infty$.

2. **a)** $\mathrm{F}_1(\pi)=\int_0^{\pi} x\sin x dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x=\pi$ (se integrează prin părți).

b) $\mathrm{F}_{n+1}(1)-\mathrm{F}_n(1)=\int_0^1 t\cdot\sin^2 t\cdot(\sin t-1)dt<0.$

c) Deoarece $\sin t\le t$, $0\le \mathrm{F}_n(1)\le\int_0^1 t^{n+1}dt=\frac{1}{n+2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{F}_n(1)=0.$

rezolvare

1.a) $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0,\forall x>0$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\infty(0-1)=-\infty, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$. În plus, f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux. Astfel, mulțimea valorilor funcției este $(-\infty, 0)$.

c) Funcția este continuă, deci nu are asimptote verticale în punctele domeniului de definiție. În 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$, deci nici aici nu există asimptotă verticală. Din **a)** rezultă că nu există asimptotă orizontală. În sfârşit, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)=\infty$, deci nu există asimptotă oblică spre ∞.

2.a) $\int_0^1 f(x)\,dx=x\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_1^x f(\ln t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(\ln x)}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(\ln x)=\frac{\pi}{2}$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$ şi faptul că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_1^x f(\ln t)dt$ are derivata $g'(x)=f(\ln x)$.

c) $s_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ este sumă Riemann ataşată funcției f, intervalului $[0,1]$, diviziunii $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$ şi punctelor intermediare $X_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$.

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$.

rezolvare

1.a) $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) + \frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$. Obținem $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$.

c) Avem $x_2 = \frac{\pi}{4} < 1 = x_1$ și demonstrăm inductiv că șirul este strict descrescător. Cum el este și cu termeni pozitivi, rezultă că este convergent.

2.a) $\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = \frac{1}{30}$.

b) $I_n = \frac{2x-1}{2}(x-x^2)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{n}{2}(2x-1)^2(x-x^2)^{n-1}dx = \frac{n}{2}\int_0^1\left((x-x^2)^{n-1} - 4(x-x^2)^n\right)dx = \frac{n}{2}I_{n-1} - 2nI_n$.

c) Din **b**), $I_n < \frac{1}{4}I_{n-1}$. De aici rezultă inductiv $I_n < \frac{1}{4^n}I_0 = \frac{1}{4^n}$. Cum $I_n > 0$, limita cerută este 0.

rezolvare

1.a) $f'(x)=1-e^{-x}>0,\forall x>0$.

b) Derivata este pozitivă pe $[0,\infty)$ şi negativă pe $(-\infty,0]$, deci avem doar punctul de extrem 0.

c) Din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$. Rezultă: dacă $m\in(1;\infty)\Rightarrow$ ecuația are 2 soluții reale diferite; dacă $m=1\Rightarrow$ ecuația are doar o soluție $x=0$; dacă $m\in(-\infty;1)\Rightarrow$ ecuația are nu are soluție.

2.a) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln 2$.

b) Dacă F este o primitivă a funcției $h(t)=\frac{t}{1+t^2}$, atunci $f(x)=F(\operatorname{tg}x)-F(1)$, deci

$f'(x)=(1+\operatorname{tg}^2 x)F'(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}x.$

c) Raționând ca mai sus, $f'(x)+g'(x)=\operatorname{tg}x-\frac{1}{\operatorname{ctg}x}=0$. Rezultă $f(x)+g(x)=\text{constant}=0$.

rezolvare

1.a) $f'(x)=\dfrac{a\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}=\dfrac{(a-2b)x+2a-b}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

b) Trebuie ca $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă funcția liniară de la numărătorul derivatei este constantă şi pozitivă, adică $a=2b>0$.

c) Conform **b)**, în acest caz funcția este strict crescătoare. Cum funcția este şi continuă, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$, mulțimea valorilor funcției este $(-2,2)$.

2.a) $f'(x)=e^{\arcsin x}>0, \forall x\in[-1,1]$.

b) Cu schimbarea de variabilă $t=\sin u, dt=\cos u du$ obținem $f(x)=\int_0^{\arcsin x} e^u \cos u du$.

c) $f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u\cos u du=e^u\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u\sin u du=e^{\frac{\pi}{2}}+e^u\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u\cos u du=e^{\frac{\pi}{2}}-1-f(1)$.

Rezultă $f(1)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{1}{2}$.

rezolvare

1.a) $f'(x)=\dfrac{(2x+a)\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x^2+ax+5)}{x^2+1}=\dfrac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}+0=0$,

deci avem asimptota oblică spre ∞ de ecuație $y=x$.

c) Trebuie ca ecuația $x^3-3x=-a$ să aibă trei soluții. Pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^3-3x$ avem

x	$-\infty$		-1		1		∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	∞

Astfel, ecuația $g(x)=-a$ are trei soluții pentru $a\in(-2,2)$. Se verifică imediat, folosind semnul lui f', că, în acest caz, funcția f are trei puncte de extrem.

2.a) $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$ (sau observăm că este integrala unei funcții impare).

b) $V=\pi\int_{-1}^{1}f^2(x)dx=\pi\left(x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{4\pi}{3}$.

c) $0\le\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$, deci limita cerută, conform teoremei cleștelui, este 0.

rezolvare

1.a) $f'_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{2-x}{e^x}=\dfrac{1}{e}$ și $f'_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{x-2}{e^x}=-\dfrac{1}{e}$.

b)

x	$-\infty$		1		2		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	|	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/e^2$	$\searrow$	0

Pentru $m<0$ nu avem soluții, pentru $m=0$ sau $m>1/e^2$ avem o soluție, pentru $m=1/e^2$ avem două soluții, iar pentru $0<m<1/e^2$ avem trei soluții.

c) $\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{2}{e^3}+\ldots+\dfrac{n-1}{e^n}=\left(\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e^3}+\ldots+\dfrac{1}{e^n}\right)+\left(\dfrac{1}{e^3}+\dfrac{1}{e^4}+\ldots+\dfrac{1}{e^n}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{e^{n-1}}+\dfrac{1}{e^n}\right)+\dfrac{1}{e^n}=$

$$=\frac{1}{e^2}\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{1-\frac{1}{e}}+\frac{1}{e^3}\frac{1-\frac{1}{e^{n-2}}}{1-\frac{1}{e}}+\ldots+\frac{1}{e^{n-1}}\frac{1-\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e}}+\frac{1}{e^n}\frac{1-\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)-\frac{n}{1-\frac{1}{e}}\frac{1}{e^n}\to\frac{1}{(e-1)^2}.$$

2.a) $F'(x)=(2a+c)x\cos x-ax^2\sin x+(c-b)\sin x\Rightarrow a=-1,\ b=c=2$.

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4x^2}\sin\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2x}\Bigg|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

c) Observăm că $f(x)<g(x),\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, adică $x\sin x+x<\pi,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Avem $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(g(x)-f(x)\big)dx=$

$$=\left(\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{12}-\pi+2.$$

rezolvare

1.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

b) Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) Deoarece arctg este funcție strict crescătoare, funcția dată are aceleași puncte de extrem local ca și funcția $g:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{x^2-1}$, adică $x=0$.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \left(\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{48}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2} = +\infty$.

c) $f'(x) = -\sin x + x$; $f''(x) = 1-\cos x \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x^2 - 1 + \frac{x^4}{2} \ge 0 \Rightarrow \cos x^2 \ge 1-\frac{x^4}{2} \Rightarrow \int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx \ge \frac{9}{10}$.

rezolvare

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0.$

b) Funcția este derivabilă pentru $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$, adică $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. În punctele ± 1, derivatele laterale sunt diferite, deci funcția nu este derivabilă.

c) Deoarece arcsin este funcție strict crescătoare, punctele de extrem ale funcției f coincid cu cele ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Acestea sunt ± 1.

2.a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

b) $V = \pi\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2\pi}{3}.$

c) $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sunt sume Riemann pentru funcția f, diviziunile $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$ și punctele intermediare $X_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă și șirul normelor diviziunilor tinde la 0, șirul sumelor Riemann este convergent.

rezolvare

1. a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, deci avem asimptota orizontală $y=0$ spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-12}{x^4} \Rightarrow$ funcția este strict descrescătoare pe $[1,2]$ și strict crescătoare pe $[2,\infty)$. Mulțimea valorilor funcției este $[f(2), f(1)]=[-1,1]$.

c) Funcția este derivabilă pe $(2,\infty)$, deoarece, pe acest interval, $-1<f(x)<0$, f este derivabilă și arccos este derivabilă. În punctul 2, $g'(2)=\lim_{x\searrow 2} g'(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. În concluzie, funcția este derivabilă pe $[2,\infty)$.

2. a) $F'(x)=f(x)$.

b) $\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(\int_1^2\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx\right)=\pi\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\text{arctg}\,2\right)$.

c) $F(x)<0$, deci $A=-\int_1^2 F(x)dx=-xF(x)\Big|_1^2+\int_1^2 xf(x)dx=F(1)-2F(2)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_1^2=$

$=\ln\dfrac{\left(11+5\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$.

Rezolvare

1.a) $|f(x)| \le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

b) $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2.a) $I_2 = \int_{-1}^{1}(1-2x^2+x^4)dx = \frac{16}{15}.$

b) $I_n - I_{n+1} = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^n dx = -x\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2(n+1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n+1}dx = \frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}.$

c) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = I_n$, iar șirul $(I_n)_n$ tinde descrescător către 0.

Soluție

1.b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-f\left(x\right)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$.

b) $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Deoarece $f'(x)>0, \forall x\in[1,\infty)$, rezultă că funcția f este strict crescătoare.

c) Funcția f este injectivă fiind strict crescătoare. Cum f este continuă pe $[1,\infty)$, $f(1)=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, iar f este strict crescătoare, rezultă că imaginea funcției f este $[1,\infty)$, deci f este surjectivă.

2. a) Funcția F trebuie să fie derivabilă. Din continuitatea în 1 rezultă $a+b=1$,
iar din derivabilitatea în 1 rezultă $a=0$. Deci $a=0$ și $b=1$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\ln x=t$. Rezultă $\int_1^e\frac{1}{xF(x)}dx=\int_1^e\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

Dar $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=arctgt\,\big|_0^1=\frac{\pi}{4}$, deci $\int_1^e\frac{1}{xF(x)}dx=\frac{\pi}{4}$.

c) $\int_1^\pi h(x)h''(x)\,dx=\int_1^\pi h(x)\left(h'(x)\right)'dx=h(x)h'(x)\big|_1^\pi-\int_1^\pi\left(h'(x)h'(x)\right)dx$. Deoarece $h(1)=h(\pi)=0$

rezultă $h(x)h'(x)\big|_1^\pi=0$. Deci $\int_a^b h(x)h''(x)\,dx=-\int_a^b\left(h'(x)\right)^2dx\le 0$.

Soluție

1.a) *f* este continuă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții continue. Cum $\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right|\le|x|$ și $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$, rezultă $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{\pi}{x}=0$. Deci $\lim\limits_{x\searrow0}f(x)=0=f(0)$. Prin urmare *f* este continuă şi în 0. Rezultă că *f* este continuă pe $[0,1]$.

b) *f* este derivabilă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, este produs de funcții derivabile.

Întrucât limita $\lim\limits_{x\searrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow0}\sin\frac{\pi}{x}$ nu există, f nu este derivabilă în 0.

c) Ecuația se scrie $g(x)=0$, unde $g:\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\cos\frac{\pi}{x}$. Cum g este continuă, $g\left(\frac{1}{n+1}\right)=(-1)^{n+2}$ și $g\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^{n+1}$, rezultă că funcția g se anulează în cel puțin un punct din $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$.

2.a) $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln2-x\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1=2\ln2-1.$

b) $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}x\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{arctg}x\,dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\mathrm{arctg}x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

c) Considerăm funcția $\varphi=f-g$. Atunci: $\varphi'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\mathrm{arctg}x$ și $\varphi''(x)=-\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Deoarece $\varphi''(x)\le0$, rezultă că φ' este descrescătoare, deci $x\ge0\Rightarrow\varphi'(x)\le\varphi'(0)\Rightarrow\varphi'(x)\le0$.
Prin urmare φ este descrescătoare, de unde $x\ge0\Rightarrow\varphi(x)\le\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)\le0\Rightarrow f(x)\le g(x)$.

Ca atare aria căutată este $A=\int_0^1\left(g(x)-f(x)\right)dx=-\frac{\pi}{4}-\ln2+\frac{3}{2}$.

Soluție

1. a) Avem $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$ și următorul tabel de variație al funcției *f*:

x	-1 $\quad$ 1
$f'(x)$	$+++$ $\;0\;$ $---$ $\;0\;$ $+++$
$f(x)$	$\nearrow$ $\quad$ $\searrow$ $\quad$ $\nearrow$

Din tabelul de variație rezultă că -1 și 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

b) Deoarece f este continuă, $f(1)=-2<m$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, rezultă că ecuația are soluție în mulțimea $(1,\infty)$. Cum *f* este strict crescătoare pe $(1,\infty)$, rezultă că f este injectivă pe $(1,\infty)$, deci soluția este unică.

c) Deoarece $g(x)=f^2(x)=x^6-6x^4+9x^2$, rezultă $g'(x)=6x^5-24x^3+18x$, de unde $g''(x)=30x^4-72x^2+18$. Pentru a rezolva ecuația $g''(x)=0$, notăm $x^2=t$ și rezultă $6\left(5t^2-12t+3\right)=0$ care are soluțiile $t_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{84}}{10}$. Deci ecuația $g''(x)=0$ are soluțiile $\pm\sqrt{t_1},\pm\sqrt{t_2}$. Ținând cont de semnul funcției g'', rezultă că *g* are patru puncte de inflexiune.

2.a) $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0)\Rightarrow f$ continuă în 0. Rezultă f este continuă pe $\mathbb{R}$. f continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int xe^x dx=e^x(x-1)+C$, iar $\int \sin x dx=-\cos x+\mathcal{C}$.

Deci o primitivă a funcției f va fi de forma: $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+c_1, & x\le 0\\ -\cos x+c_2, & x>0\end{cases}$.

Din condiția de continuitate a lui *F* rezultă $c_1=c_2=F(0)+1=0$.

c) Deoarece *F* este o primitivă a lui *f*, rezultă $\int\limits_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$, deci limita de calculat este $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}$. Cu regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F'(x)}{2x}$. Apoi $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x)=1 \Leftrightarrow e^x-1=1 \Leftrightarrow x=\ln 2$.

b) f' este negativă pe $(-\infty,0)$ și pozitivă pe $(0,\infty)$, deci valoarea minimă este $f(0)=1$.

c) $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\sqrt{\frac{e^x-1-x}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\sqrt{\frac{e^x-1-x}{x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a) $f(3)=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

b) $g(x)=F\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)-F(0)$, unde F este o primitivă a funcției $t\to\sqrt{3e^t+1}$.

Rezultă $g'(x)=\sqrt{3e^{\ln\frac{x^2-1}{3}}+1}\cdot\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)'=x\cdot\frac{2x}{x^2-1},\ \forall x\in(1,\infty)$.

c) Avem $g'(x)=2f'(x)$, deci $g(x)-2f(x)=\text{constant}=g(2)-2f(2)=0$.

Soluție

1.a) Succesiv rezultă:

$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}}=-\infty .$$

b) Aplicând corect reguli de derivare, rezultă $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$ .Tabelul de variație al funcției *f* este:

x	$-\infty$		-2		-1		1		∞
$f'(x)$		+++++	|	+++++	0	- - - - - -	|	++++++	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Din tabelul de variație al funcției rezultă că –1 și 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

c) Funcția *f* este derivabilă în orice punct *x* care satisface condiția $x^3-3x+2\neq 0$. Deci domeniul de derivabilitate al funcției *f* este $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

2. a) Descompunem în fracții simple: $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$. $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}$. Deci

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\ln\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}+C .$$

b) Deoarece $t\in(1,\infty)$ rezultă $t>1, t+1>2, t+2>3\Rightarrow t(t+1)(t+2)>6\Rightarrow\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}<\dfrac{1}{6}$.

Atunci, pentru $x>1$ rezultă $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt<\int_1^x\frac{1}{6}dt=\frac{x-1}{6}$. Egalitatea are loc dacă $x=1$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă: $x^3=t$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

Dar $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=arctgt\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{\pi}{12}$.

Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{3}$, rezultă că dreapta de ecuație $y=\frac{2}{3}$ este asimptotă orizontală spre ∞.

b) Avem $f(1)=1$ şi $0<f(n)\le\frac{9}{10}, \forall n\ge 2$, deci $0<a_n\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

c) $g'(x)=-\frac{7e^x}{(3e^x+4)^2}$, $g''(x)=\frac{7e^x(3e^x-4)}{(3e^x+4)^3}$. punctul de inflexiune este $\ln\frac{4}{3}$.

2 a) $\int_0^1 f(e^x)dx=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

b) $V=\pi\int_1^e \ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_1^e=\pi$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $\sqrt{\ln x}=t$, apoi o integrare prin părți:

$$\int_1^e\sqrt{\ln x}dx=\int_0^1 2t^2e^{t^2}dt=\int_0^1\left(e^{t^2}\right)'tdt=te^{t^2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{t^2}dt=e-\int_0^1 e^{t^2}dt=e-\int_0^1 e^{x^2}dx.$$

Prin urmare $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e f(x)dx=\int_0^1 e^{x^2}dx+e-\int_0^1 e^{x^2}dx=e$.

Soluție

1.a) Avem $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0, \forall n \geq 1$, deci şirul este strict crescător, de unde concluzia.

b) Funcția g este derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$ şi $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$.

Cum g este continuă în 0 şi $\lim\limits_{x \nearrow 0} g'(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} g'(x) = 1$, rezultă că g este derivabilă în 0 şi $g'(0) = 1$.

c) Numărul cerut este valoarea minimă a funcției $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$. Acesta este $h(1) = 2$.

2.a) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t} dt = -\frac{1}{2} e^{-t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$.

b) Aplicăm regula lui l´Hôspital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x F'(\cos x)}{2x} = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{\sin x}{2x} \cdot f(\cos x)\right) = -\frac{1}{2} f(1) = -\frac{1}{2} e^{-1}.$$

c) $g'(x) = F'(x) + f'(x) = f(x) - 2xe^{-x^2} = (1 - 2x)e^{-x^2}$, deci g are unicul punct de extrem $x = \frac{1}{2}$.

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=0\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$.

b) f este derivabilă şi $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Ținând cont de semnul derivatei, rezultă că – 1 este punct de minim local, iar 1 este punct de maxim local.

c) Considerăm funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-g(x)$. Rezultă $h'(x)=-\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. Deoarece

$h'(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$, rezultă că h este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Deci

$h(x)<h(0), \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow h(x)<0, \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}x, \forall x\in(0,\infty)$

2.a) Funcția f este continuă pe $[0,1]$, deci este integrabilă pe acest interval. Funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=x\ln x$ este continuă, deci este integrabilă pe $[1,2]$. Deoarece $f(x)=g(x), \forall x\in[1,2]\setminus\{1\}$, rezultă că f este integrabilă pe $[1,2]$. Fiind integrabilă pe $[0,1]$ şi pe $[1,2]$, rezultă f integrabilă pe $[0,2]$.

b) Fie F o primitivă a funcției $\varphi:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=t\ln t$. Atunci: $\int_1^x t\ln t\,dt=F(x)-F(1)$.

Rezultă $\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=F_d'(1)$. Deoarece $F_d'(1)=\varphi(1)=0$ rezultă că limita este egală cu 0.

c) Arătăm că există $a\in[0,t)$ şi $b\in(t,2]$ astfel încât $\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx=(b-a)f(t)$, adică

$\int_0^b f(x)dx-bf(t)=\int_0^a f(x)dx-af(t)$. Considerăm funcția $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(y)=\int_0^y f(x)dx-yf(t)$. Avem $g'(y)=f(y)-f(t)$, deoarece f este strict crescătoare, deci g este strict descrescătoare pe $[0,t]$ şi strict crescătoare pe $[t,2]$. Aceasta garantează existența numerelor a şi b.

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1}=1.$

b) Deoarece $f'(x)=3x^2+1>0$, rezultă că f este strict crescătoare , deci este injectivă.
Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, iar f este strict crescătoare și continuă rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$, deci *f* este surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă *f* este bijectivă, deci este inversabilă.

c) Pentru $x\geq 1$, $f\left(\sqrt[3]{x}\right)=x+\sqrt[3]{x}>x$ și $f\left(\sqrt[3]{x}\right)-1=x-3\sqrt[3]{x}^2+4\sqrt[3]{x}-2=x-\sqrt[3]{x}\left(3\sqrt[3]{x}-4+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)<x$, deci soluția ecuației $f(y)=x$ se află între $\sqrt[3]{x}-1$ și $\sqrt[3]{x}$. Astfel $1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}<\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}<1$, de unde $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=1$.

2.a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$, deoarece f este impară.

b) $\displaystyle\int_1^3\frac{f(x)}{\sin x}dx=\int_1^3 x^2dx$. Dar $\displaystyle\int_1^3 x^2dx=2c^2\Leftrightarrow\frac{26}{3}=2c^2$. Rezultă $c=\sqrt{\dfrac{13}{3}}\in(1,3)$.

c) $F(x)=\left(-x^2+2\right)\cos x+2x\sin x$. Considerăm șirul $\left(x_n'\right)_{n\geq 1}$, $x_n'=2n\pi$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}F\left(x_n'\right)=-\infty$.
Considerând șirul $\left(x_n''\right)_{n\geq 1}$, $x_n''=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}F\left(x_n''\right)=\infty$. Prin urmare funcția F nu are limită la ∞.

Soluție

1.a) $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și $f'(0)>0,$ deci f' are semn constant pozitiv. Astfel f este strict crescătoare, continuă, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=0$, de unde concluzia.

b) Cum $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă relația cerută.

c) Fie funcția $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=g(x)-x$. Rezultă $\varphi'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1$. Deoarece $\varphi'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă φ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, pentru orice $x>0$ rezultă $\varphi(x)<\varphi(0)$. Cum $\varphi(0)=0$, se obține inegalitatea cerută.

2.a) Într-adevăr f este derivabilă și $f(0)=f(1)=0$, iar $\int_0^1 f(x)dx=\left.\dfrac{x^4}{2}-x^3+\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1=0$.

b) Deoarece $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$, rezultă $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}+d$ și $f(0)=d$, $f(1)=a+b+c+d$. Prin urmare, condiția $f\in M$ este echivalentă cu $\begin{cases}a+b+c=0\\ \dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}=0\end{cases}$, de unde: $a\in\mathbb{R}, a\neq 0, b=-\dfrac{3a}{2}, c=\dfrac{a}{2}, d\in\mathbb{R}$. Rezultă $f(x)=ax^3-\dfrac{3a}{2}x^2+\dfrac{a}{2}x+d,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ d\in\mathbb{R}$. Atunci $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=d=f(0)$.

c) Aplicăm teorema de medie: există $c\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=f(c)$. Rezultă $f(c)=f(0)$ și $f(c)=f(1)$. Conform teoremei lui Rolle, există $\alpha\in(0,c)$ și $\beta\in(c,1)$ astfel încât $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$.

Soluție

1.a) *f* este continuă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1)$ și $(1,\infty)$, deoarece *f* este cât de funcții continue.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1=f(1)$ rezultă că f este continuă în 1.

b) Aplicăm regula lui l'Hôspital. Rezultă $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\frac{1}{2}$.

c) Avem $f'(x)=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$ și avem de arătat că $g(x)=x-1-x\ln x<0,\ \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Cum $g'(x)=-\ln x$, rezultă tabelul de variație următor, din care rezultă concluzia.

x	0 $\qquad\qquad$ 1 $\qquad\qquad$ ∞
$g'(x)$	$+++++++++\ 0\ ----------$
$g(x)$	$\nearrow\qquad 0\qquad\searrow$

2.a) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui *f*. Atunci $F'(x)=\ln(1+\sin^2 x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $1+\sin^2 x\ge 1$ rezultă $F'(x)=\ln(1+\sin^2 x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\sin x=t$. Rezultă $\int_0^{\pi} f(x)\cos dx=\int_0^0\ln\left(1+t^2\right)dt=0$.

c) Funcția f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite o primitivă. În plus, $g(x)=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)dt=F(\arcsin x)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

de unde $g'(x)=\arcsin' x\cdot F'(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2\right)$.

Soluție

1.a) $f_2'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0,\infty)$.

b) Cum $f_n\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f_n(1) = \left(\frac{1}{e^n} - 1\right) \cdot 1 < 0$ și f este continuă rezultă că ecuația $f_n(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$. Cum f_n este strict crescătoare, rădăcina este unică.

c) Folosind de două ori regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{3x-2-x^2-\ln x}{(x-1)\left(x^2+\ln x - 1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{-2+\frac{1}{x^2}}{6x+\frac{1}{x}-2+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{6}.$$

2. a) Considerăm funcțiile, $g:[-2\pi,0]\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ și $H:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $h(x) = 1+\sin x$.
Deoarece $f(x) = g(x), \forall x \in [-2\pi,0]\setminus\{0\}$ și g este integrabilă pe $[-2\pi,0]$ rezultă f integrabilă pe $[-2\pi,0]$.
Analog, deoarece $f(x) = h(x), \forall x \in [0,2\pi]$ și h este integrabilă pe $[0,2\pi]$ rezultă f integrabilă pe $[0,2\pi]$.
Prin urmare f este integrabilă pe $[-2\pi,0]\cup[0,2\pi] = [-2\pi,2\pi]$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_0^{\pi}(1+\sin x)\,dx = \pi + \frac{7}{4}.$

c) $\int_0^{2\pi}(1+\sin x)^n\,dx \le \int_0^{2\pi}(1+\sin x)\cdot 2^{n-1}\,dx = 2^{n-1}(x-\cos x)\Big|_0^{2\pi} = 2^n\pi.$

Soluție

1.a) $|f(x)| \le \max(|x|,|x^3|) \le |x|,\ \forall x \in [-1,1]$.

b) Din $|f(x)| \le |x|,\ \forall x \in [-1,1]$ rezultă $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Cum $f(0)=0$, rezultă că f este continuă în origine.

c) Fie $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0},\ x \ne 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{2}n^3} = 0$, deci f nu este derivabilă în 0.

2.a) f trebuie să fie derivabilă, deci continuă. Din continuitatea lui f rezultă $b=0$.

Apoi $f'(x) = ae^x + axe^x - 1, \forall x < 0$ și $f'(x) = \cos x - x\sin x, \forall x > 0$.

Cu o consecință a teoremei lui Lagrange rezultă $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow a-1=1 \Rightarrow a=2$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} x\cos xdx = -\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + x\sin x\Big|_{0}^{\pi} + \cos x\Big|_{0}^{\pi} = -\dfrac{3}{2}$.

c) Avem $I_n = \int_0^{\pi} x^{n+1}\cos xdx = x^{n+1}\sin x\Big|_0^{\pi} - (n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin xdx = -(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin xdx$ și

$\int_0^{\pi} x^n \sin xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n \sin xdx \ge \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n \sin xdx = 1$, deci $I_n \le -(n+1)$, de unde concluzia.

Soluții

1.a) $f(x)=\ln\frac{x+2}{x}=\ln|x+2|-\ln|x|$, $f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$, $f''(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}<0,\ \forall x\in(-\infty,-2)$.

b) $a_n=\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)-\ln\frac{n(n+1)}{2}=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\ln\frac{n(n+1)}{2}=\ln\frac{n+2}{n}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+2}{n}=0$.

c) Considerăm funcția $h:[1,2]\to\mathbb{R}$, $h(x)=(x-1)f(x)$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției h: există $c\in(0,1)$ astfel încât $h'(c)=\frac{h(2)-h(1)}{1}$, de unde $f(c)+(c-1)f'(c)=f(2)$.

2.a) $\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}arctg\left(x^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$.

b) Se observă că $\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^4}\le 1,\forall x\in[0,1]$. Aplicând proprietatea de monotonie a integralei rezultă $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx\le\int_0^1 1dx$, de unde $\frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le 1$.

c) $\int_0^1\frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}dx=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'dt=\frac{f'(1)}{f(1)}-\frac{f'(0)}{f(0)}=-2$, deoarece $f'(x)=-\frac{4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}$.

Soluție

1.a) Funcția *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci este injectivă. Deoarece $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și *f* este continuă rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$, prin urmare *f* este surjectivă.

b) Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=x+e^x-(2x+1)=e^x-x-1$. $h'(x)=e^x-1$, iar din tabelul de variație rezultă concluzia.

x	$-\infty$		0		∞
$h'(x)$	− − − − − − − − − − − − −		0	+ + + + + + + + + + + + + + +	
$h(x)$	∞	↘	0	↗	∞

c) Fie funcția $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ 0\,\theta(x)=x+e^x-(mx+1)$. Atunci $\theta(x)\ge\theta(0),\forall x\in\mathbb{R}$, adică 0 este punct de minim a lui θ. Conform teoremei lui Fermat, $\theta'(0)=0$. Deoarece $\theta'(x)=1+e^x-m$ rezultă $\theta'(0)=2-m=0$, de unde $m=2$.

2.a) Deoarece *F* este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției *f*, atunci $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $(4F(x))'=4f(x)=4\sin^3 x\cos x$. Apoi $(\sin^4 x)'=4\sin^3 x\cos x$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ G(x)=\frac{1}{4}\sin^4 x.$ Cum $G'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, există $d\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)=G(x)+d$, iar pentru $c=4d$, rezultă concluzia.

b) $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $x=\pi-t$ și obținem

$I=\int_0^{\pi}\sin^{6n+3}x\cos^{2n+1}x\,dx=\int_{\pi}^{0}\sin^{6n+3}(\pi-t)\cos^{2n+1}(\pi-t)(-1)\,dt=\int_0^{\pi}\sin^{6n+3}t(-\cos t)^{2n+1}dt=-I$, de unde $I=0$.

Soluție

1.a) $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ și $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in(-1,1)$.

b) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)=-1$.

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}+1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+1\right)=1$.

Prin urmare, ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y=-x+1$.

c) Pentru $x\in(0,1]$ avem $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\in[0,1]$. Pentru $x\in[1,\infty)$ avem $-x\le 1-x^2\le 1$, deci

$-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$, de unde $-1\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le 1$, $\forall x\ge 1$. Astfel $-1\le g(x)\le 1, \forall x\in(0,\infty)$

2.a) $\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt=\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{t^2+t+1}dt=\ln\left(t^2+t+1\right)\Big|_0^{3/4}=\ln\dfrac{37}{16}$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $g(x)=t\Leftrightarrow x=f(t)$.

Rezultă $\int\limits_1^3 g(x)dx=\int\limits_0^1 tf'(t)dt=tf(t)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(t)dt=f(1)-\int\limits_0^1 f(x)dx=3-\int\limits_0^1 f(x)dx$, de unde concluzia.

c) Folosind **b)** avem $\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^{\alpha} g(x)dx=3-\int\limits_1^3 g(x)dx+\int\limits_1^{\alpha} g(x)dx=3-\int\limits_{\alpha}^3 g(x)dx$, așa încât inegalitatea de

demonstrat este echivalentă cu $\int\limits_{\alpha}^3 g(x)dx\le 3-\alpha$. Deoarece $g:[1,3]\to[0,1]$ rezultă $g(x)\le 1, \forall\alpha\in[\alpha,3]$ din

care prin integrare rezultă $\int\limits_{\alpha}^3 g(x)dx\le 3-\alpha$.

Soluție

1.a) într-adevăr, u este o funcție de două ori derivabilă, $u'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, deci $u'(0)=1$ și $f(0)=0$.

b) Avem $\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x}}$ și $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

Apoi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}\cdot\left(\dfrac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}+\dfrac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}+\dfrac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}+\dfrac{x^{n-1}}{x^{n-1}}\right)$, iar

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{f''(0)}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^k(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)^k=\left(f'(0)\right)^k=1,\ \forall k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$.

2. a) $g(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt=\int\limits_0^x\dfrac{1}{1+t}\,dt=\ln(1+x)$.

b) $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}dx=-\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+1}\right)'\ln(1+x)\,dx=-\dfrac{1}{2}\ln 2+\int_0^1\dfrac{1}{(x+1)^2}dx=\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

c) Pentru $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ cu teorema de medie $\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx=\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{k-1}{n}\right)f(c_k)$, cu $c_k\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$.

Apoi, deoarece f este descrescătoare, $f(c_k)\geq f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Rezultă $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)dx=\ln 2$.

Soluție

1. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2(2x+1)(2x+3)}$.

b) Deoarece $f'(x) > 0$ rezultă că funcția *f* este strict crescătoare. Cum $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, rezultă $f(x) < 0, \forall x \in (0,\infty)$.

c) $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln\left(n+1+\frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) = f(n) < 0.$

2. a) Utilizăm schimbarea de variabilă $t = -u$. Rezultă $f(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt = -f(x)$.

b) Concluzia rezultă din $f(x) = \int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt > \int_1^x e^{t^2} dt > \int_1^x e^t dt = e^x - e$ și $\lim_{x\to\infty}\left(e^x - e\right) = \infty$.

c) $e^{t^2} \le e^t, \forall t \in [0,1]$.

Rezultă $\int_0^x e^{t^2} dt \le \int_0^x e^t dt, \forall x \in [0,1]$, deci $f(x) \le e^x - 1, \forall x \in [0,1]$.

Prin urmare $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 \left(e^x - 1\right)dx = e - 2$.

Soluție

1. a) $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{3}{2\sqrt[3]{x}}=-\infty$, deci f nu este derivabilă în 0.

b) Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[k,k+1]$ și derivabilă pe intervalul $(k,k+1)$, aplicăm teorema lui Lagrange . Rezultă existența unui punct $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

c) $a_{n+1}-a_n=-f(n+1)+f(n)+\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$ cu $c_n\in(n,n+1)$, deci $a_{n+1}-a_n<0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1-(x+1)\ln(x+1)\Big|_0^1+x\Big|_0^1=-\frac{7}{12}-2\ln 2.$.

b) Cum $F(0)=0$, aplicăm regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^4}$. Dar

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x+x^2-\frac{1}{1+x}}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{20x^3(1+x)}=\frac{1}{20}.$$

c) $f'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$**.** Cum, pe $(-1,0)$ derivata f' este negativă, iar pe $(0,\infty)$ este pozitivă, rezultă că 0 este punct de minim absolut, deci $f(x)\ge f(0)=0$.

Rezultă $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ge\ln(1+x)$, din care se obține $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx\ge\int_0^1\ln(1+x)dx$

Dar $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{5}{12}$, deci $\int_0^1\ln(1+x)dx\le\frac{5}{12}$.

Soluție

1. a) Prin inducție demonstrăm că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x)=2^{n+1}e^{2x}, \forall x\in\mathbb{R}$.Într-adevăr $f_1(x)=f_0'(x)=2e^{2x}$ .Presupunem că $f_n(x)=2^n e^{2x}$ și rezultă că $f_{n+1}(x)=2^{n+1}e^{2x}$. Pentru $n=3$ rezultă $f_3(x)=8e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2^n e^{2x}=0$ rezultă că axa Ox este asimptotă orizontală spre $-\infty$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 2^n e^{2x}=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^n e^{2x}}{x}=\infty$ rezultă că f_n nu are alte asimptote.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(a)+f_2(a)+\ldots+f_n(a)}{f_{n+1}(a)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2e^{2a}+2^2e^{2a}+\ldots+2^ne^{2a}}{2^{n+1}e^{2a}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$.

2. a) Funcția f este continuă pe intervalul $(0,\infty)$ deoarece pe acest interval f este produs de funcții continue. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln^2 x=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=0=f(0)$, f este continuă în 0. Rezultă f continuă pe $[0,\infty)$ și prin urmare este integrabilă pe $[0,1]$.

b) Deoarece funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(t)=\int_t^1 f(x)dx$ este continuă, avem $\int_0^1 f(x)dx=F(0)=\lim\limits_{t\searrow 0}F(t)$. Cum

$$\int_t^1 x\ln^2 x dx=\left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_t^1=\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{t^2}{2}\ln^2 t+\frac{1}{4}-\frac{t^2}{4},$$ rezultă că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

c) $\int_1^e\frac{1}{x}\ln^2\frac{1}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}(-\ln x)^2dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^2 x dx=\frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e=\frac{1}{3}$.

Soluție

1.a) $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$.

b) Deoarece $f'(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$ rezultă că *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Din $x>0$ și *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, rezultă $f(x)>f(0)=0$.

c) $f(x)=\ln e^x-\ln(1+x)=\ln\frac{e^x}{1+x}$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

2.a) $F(x)=\int_1^2 t^x dt=\left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_1^2=\frac{2^{x+1}-1}{x+1}$, pentru $x\neq-1$, deci $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; pentru $x=-1$ relația se verifică direct.

b) $\lim\limits_{x\to-1} F(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2^{x+1}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1} 2^{x+1}\ln 2=\ln 2$.

c) Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue, rezultă că *F* este primitiva funcției *f* pentru care $F(0)=1$ (condiție care este îndeplinită). Deci $F'(x)=f(x), \forall x\in(-1,\infty)$.

Rezultă $f(x)=\left(\frac{2^{x+1}-1}{x+1}\right)'=\frac{(x\ln 2+\ln 2-1)2^{x+1}+1}{(x+1)^2}$.

Soluție

1. a) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y = mx + n$, unde:

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x} = 1$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

b) $f'(x) = \frac{\left(x^2+x+1\right)'\cdot(x+1) - \left(x^2+x+1\right)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) Cum $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} < 0, \quad \forall x \in (-\infty,-1)$ funcția *f* este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. a) $\int_0^\pi f_2(x)dx = \int_0^\pi |\sin 2x| dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos 2x}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2$.

b) Cum $\frac{|\sin(nx)|}{x} \le \frac{1}{x}, \forall x \in [\pi, 2\pi]$, rezultă $I_n = \int_\pi^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x} dx \le \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln 2.$

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $nx = t$ şi obținem

$$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{nt} ndt = \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \ge \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Soluție

1.a) $\left(f(x)\right)^x = \left(1+\frac{x+a+1}{x^2-1}\right)^x = \left[\left(1+\frac{x+a+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x+a+1}}\right]^{\frac{x^2+(a+1)x}{x^2-1}}$, deci limita este *e*.

b) Avem $f'(x) = -\frac{x^2+2(a+1)x+1}{\left(x^2-1\right)^2}$, $x \neq \pm 1$. Dacă $x_0 = 3$ este punctul de extrem local și *f* este derivabilă în 3, atunci $f'(3)=0$, deci $a=-\frac{8}{3}$. Pentru $a=-\frac{8}{3}$, din semnul lui f' rezultă că $x_0=3$ este punct de extrem.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+a$. Dacă $g(1)\neq 0$, $g(-1)\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ atunci *f* are două asimptote verticale, $x=1$ și $x=-1$. Dacă $a=0$ atunci $f(x)=\frac{x}{x-1}$, $x\neq\pm 1$, iar dacă $a=-2$, atunci $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$, $x\neq\pm 1$ și în ambele cazuri *f* are o singură asimptotă verticală.

2. a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\,dt=\int_0^x 1\,dt = x$, iar $f_2(x)==\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}$.

b) Se demonstrează prin inducție că $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$. Prin urmare :

$\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=\frac{(n+1)x^{n+1}+(n+1)!}{x^{n+1}+2(n+1)!}$. Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=n+1$.

c) $V=\pi\int_0^\pi x^2\sin^2 x\,dx\ \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2\sin 2x}{2}-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi^4}{6}-\frac{\pi^2}{4}$.

Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow -2} f(x)=\lim\limits_{x\searrow -2}\ln\frac{2+x}{2-x}=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 2}\ln\frac{2+x}{2-x}=\infty$, rezultă asimptotele verticale $x=-2$ şi $x=2$; alte asimptote nu există.

b) Deoarece $f'(x)=\frac{2-x}{2+x}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)'=\frac{4}{4-x^2}>0,\forall x\in(-2,2)$, deci f este strict crescătoare pe $(-2,2)$.

c) Notăm $\frac{1}{x}=y$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}f(y)=f'(0)=1$.

2.a) $f(t)=t^2\int_1^2\frac{1}{x^2}dx-2t\int_1^2\frac{e^x}{x}dx+\int_1^2 e^{2x}dx=At^2-2Bt+C$, unde $C=\int_1^2 e^{2x}dx=\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_1^2=\frac{e^4-e^2}{2}$.

b) Deoarece $A=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}$, rezultă $f(t)=\frac{1}{2}t(4B-t)+\mathcal{C}$, de unde $f(2B+t)=f(2B-t)=\frac{1}{2}\left(4B^2-t^2\right)+\mathcal{C}$.

c) Deoarece $f(t)=At^2-2Bt+C\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$, rezultă $4B^2-4AC\leq 0$,

adică $B^2\leq AC$ din care rezultă $\left(\int_1^2\frac{e^x}{x}dx\right)^2\leq\left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\frac{1}{x^2}dx\right)$.

Soluție

1.a) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$.

Dacă $x<0$ rezultă $1+x<1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}<1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}<\alpha$ și în final $f'(x)<0$.

Dacă $x>0$ rezultă $1+x>1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}>1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}>\alpha$ și în final $f'(x)>0$.

Rezultă *f* strict descrescătoare pe $(-1,0]$ și strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b) *f* este strict descrescătoare pe $(-1,0]$, deci $x<0 \Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, deci $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

Așadar $f(x)>1, \forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$, de unde rezultă cea ce trebuia demonstrat.

c) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-1}>0, \forall x\in(-1,\infty)$. Rezultă *f* convexă pe $[0,\infty)$ .Prin urmare $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}, \forall a,b\in[0,\infty)$. Pentru $a=2x$ și $b=2y$ rezultă inegalitatea din enunț.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

b) $\int_1^3 f^2(x)[x]dx=\int_1^2 f^2(x)dx+2\int_2^3 f^2(x)dx=\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_1^2+2\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_2^3=.$

$=\frac{16}{3}-6\ln 2+2\ln 3$.

c) $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx$, iar $\int_n^{n+1}f(x)dx=(n+1-n)f(c_n)=f(c_n)$, cu $c_n\in(n,n+1)$, deci $a_{n+1}-a_n>0$ deoarece *f* este strict descrescătoare. Apoi, din $\int_1^{k+1}f(x)dx=f(c_k)$, cu $c_k\in(k,k+1)$.

$\int_0^n f(x)dx=\sum_{k=o}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx=\sum_{k=o}^{n-1}f(c_k)>f(0)+f(1)+...+f(n-1)$, de unde $a_n<f(n)-f(0)<1$, deci șirul este mărginit.

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\infty$.

b) Funcția este strict crescătoare, este continuă şi $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0,\ f(1)=1>0$.

c) Folosind regula lui l'Hôspital pentru cazul $\frac{0}{0}$ avem $l=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)e^x=(x_0+1)e^{x_0}$, din $f(x_0)=0$ rezultă că $x_0=-\ln x_0=\ln\frac{1}{x_0}$, deci $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$ şi $l=(x_0+1)\frac{1}{x_0}=1+\frac{1}{x_0}=f'(x_0)$.

2.a) $I_1=\int_0^1\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln^2 2$.

b) Deoarece $x\in(0,1)\Rightarrow x^n>x^{n+1}$ şi $\frac{1}{x+1}>0$, avem $\frac{\ln\left(1+x^n\right)}{x+1}>\frac{\ln\left(x^{n+1}+1\right)}{x+1}$, $\forall x\in(0,1)$ de unde concluzia.

c) Avem $I_n\ge 0$ şi $I_n\le\int\limits_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\le\int\limits_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$; concluzia rezultă din teorema cleştelui.

Soluție

1. a) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ dacă $x\neq 0$ şi $f(0)=a$; $f(1)=e-1$, $f'(1)=1$, deci $y=x+e-2$ este ecuația tangentei.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, deci f este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă $f(0)=a=1$.

c) Evident f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}=f'(0)$.

2.a) $I_1=\int_1^2(x-1)(2-x)dx=\left(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{6}$.

b) $I_n=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2(2x-3)'\left(-x^2+3x-2\right)^n dx=\dfrac{1}{2}(2x-3)\left(-x^2+3x-2\right)^n\Big|_1^2+\dfrac{n}{2}\int\limits_1^2(2x-3)^2\left(-x^2+3x-2\right)^{n-1}dx=$

$=2n\int\limits_1^2\left(x^2-3x+\dfrac{9}{4}\right)\left(-x^2+3x-2\right)^{n-1}dx=2n\left(\dfrac{1}{4}I_{n-1}-I_n\right)$, de unde concluzia cerută.

c) $0\le(x-1)(2-x)\le\dfrac{1}{4},\ \forall x\in[1;2]$, de unde $0\le I_n\le\int_1^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\dfrac{1}{4^n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Soluție

1.a) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, deci $y=x$ asimptota oblică spre ∞.

b) Punctele de extrem sunt aceleaşi cu ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3-3x+2.$ Deoarece $g'(x)=3(x^2-1)$, punctele de extrem sunt $\pm1.$

c) Folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\operatorname{arctg}f(x)-\pi}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+f^2(x)}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=-2$.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{2\left(2+tg^2\frac{x}{2}\right)}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{t^2+2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$.

b) Dacă *F* este o primitivă, atunci $F'(x)=\frac{1}{3+\cos x}$. Cum $\cos x\in[-1;1],\ F'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R},$ deci *F* este strict crescătoare.

c) Avem $\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$, de unde $\frac{x}{4}<\int_0^x f(t)dt\le\frac{x}{2},\ \forall x>0.$

Rezultă $\frac{1}{4x}<\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\le\frac{1}{2x},\ \forall x>0$, deci limita este egală cu 0.

Soluție

1.a) $f'(x)=3e^{3x}+2,\ f(0)=2,\ f'(0)=5$, deci ecuația cerută este $y-2=5x$.

b) $f'(x)>0 \Rightarrow f$ strict crescãtoare $\Rightarrow f$ injectivã. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} =-\infty,\ f$ continuã $\Rightarrow f$ surjectivã. Deci f este bijectivã $\Rightarrow f$ inversabilã.

c) Suma este egală cu $e^{-3}+e^{-6}+...+e^{-3n}=e^{-3}\dfrac{1-e^{-3n}}{1-e^{-3}}$ și are limita $\dfrac{1}{e^3-1}$.

2.a) $a_1=\int\limits_0^1 \sin\pi x dx=-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\dfrac{2}{\pi}$.

b) Arătăm inductiv că $0\le a_{n+1}\le a_n,\ \forall n\ge 0$. Cum $0\le a_1=\dfrac{2}{\pi}\le 1=a_0$, presupunând că $0\le a_n\le a_{n-1}\le...\le a_0=1$ rezultă $0\le \sin\pi x\le 1,\ \forall x\in[0,a_n]$, deci $0\le a_{n+1}=\int\limits_0^{a_n}\sin\pi x dx\le\int\limits_0^{a_n}dx=a_n$. Deci $(a_n)_n$ este monoton și mărginit.

c) Dacă $(a_n)_{n\ge 0}$ convergent către $x=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci obținem, prin trecere la limită, $x=\int_0^x \sin\pi t dt$.

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x-\int_0^x \sin\pi t dt$. Avem $g(0)=0$ și $g'(x)=1-\sin\pi x\ge 0\Rightarrow x=0$ este soluție unică.

Soluție

1.a) f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b) Avem $\sqrt{x^2+1}f'(x)=x$ şi derivând $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'(x)+\sqrt{x^2+1}f''(x)=1$, de unde $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=$ $=\sqrt{x^2+1}$.

c) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$, deci $y=-x$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

2.a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx=(x-\ln(x+1))\big|_0^1=1-\ln 2$.

b) $I_n=\int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{x^n+1}dx=\int_0^1 x\left(\ln\left(x^n+1\right)\right)'dx=\ln 2-\int_0^1\ln\left(x^n+1\right)dx$

c) Ştim că $\ln(1+t)\le t,\ \forall t\ge 0$, de unde $0\le\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx=0,$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\ln 2$.

Soluție

1.a) $f(1)=0$, $f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{x^2+x-1}{x^2}$, $f'(1)=\dfrac{1}{e}$, deci ecuația este $y=\dfrac{1}{e}(x-1)$.

b) $f'(x)=0$ are rădăcinile $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Din semnul derivatei rezultă că acestea sunt puncte de extrem local.

c) $m=\lim\dfrac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-e^{-\frac{1}{x}}=-2$, deci $y=x-2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

2.a) Cum $f'(x)=x^3\sqrt{x^2+1}\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) $f(1)=\int\limits_0^1 t^3\sqrt{t^2+1}dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(u^4-u^2\right)du=\left(\dfrac{u^5}{5}-\dfrac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{5x^4}=\dfrac{1}{5}$, din teorema lui l'Hôspital rezultă că limita cerută este $\dfrac{1}{5}$.

Soluție

1.a) $a_1 > a_0$, iar $a_{k+1} > a_k \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$, deci prin inducție $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

b) Avem $a_0 < 2$ şi $a_k < 2 \Rightarrow a_{k+1} < 2$, deci inductiv $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Fiind şi monoton $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+a_{n+1}} + \sqrt{2+a_n}} = \frac{1}{4}$.

2.a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 t + tgt)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((tgt)' + tgt - 1)dt = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

b) $f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x)\sin x}{\cos^2 x} > 0,\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, deci f este strict crescătoare.

c) Pentru cazul $\frac{0}{0}$, aplicând regula lui l'Hôspital, limita devine $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{(\sin x + \cos x)\sin x}{2x\cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

Soluție

1.a). $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ deci dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptota verticală la graficul funcției.

b) $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ şi $n = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = 1$, deci $y = x + 1$ este asimptota oblică spre $+\infty$.

c) Funcția este derivabilă în punctele în care este definită şi expresia de sub radical nu se anulează, adică pe $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
În punctul -1, derivatele laterale nu sunt finite, deci funcția nu este derivabilă.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\, dx = 2$.

b) Din $F'(x) = f_4(x)$ rezultă $F''(x) = 4\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) f_4^2(x)$, deci $F''(x) = f_4^2(x)\sin 4x$.

c) Cu schimbarea de variabilă $y = \frac{\pi}{2} - x$,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} (-1)\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 y}{\sin y + \cos y} dy = J \text{, iar}$$

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x\right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, deci nu avem asimptotă spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, deci $y = 0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(n+1)-f(n)=\dfrac{e^{c_n}(c_n-1)}{c_n{}^2}$, $c_n\in(n,n+1)$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(f(n)-f(n+1))=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{c_n}\right)^2(1-c_n)e^{c_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-c_n)e^{c_n}=-\infty$.

2.a) $f(1)=\int_0^1 e^{-t}(t^2-3t+2)dt=\int_0^1 e^{-t}(t-1)(t-2)\,dt>0$.

b) $f'(x)=e^{-x}(x^2-3x+2)$. Din tabelul de variație reiese că x =1 este punct de maxim local și x = 2 este punct de minim local.

c) $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}\left(x^2-3x+2\right)-e^{x}\left(x^2+3x+2\right)}{2x}=-5$

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=+\infty,\ x=0$ este asimptota verticală.

b) $f''(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$, deci $x=-0{,}5$ este punct de inflexiune.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}x^2\left(e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}\dfrac{-x^2}{x(x+1)}\dfrac{e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1}{-\frac{1}{x(x+1)}}=-1$.

2.a) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=tgx\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2n+2}\,xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\mathrm{tg}^{2n}\,x(\mathrm{tg}^2\,x+1)-\mathrm{tg}^{2n}\,x\right]dx=\dfrac{\mathrm{tg}^{2n+1}\,x}{2n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n;\ I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

c) Cum $0\le tg_x^{2n+2}\le tg_x^{2n},\ \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, rezultă că $0\le I_{n+1}\le I_n$, deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător şi mărginit.

Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, atunci din punctul **b)** rezultă concluzia.

Soluție

1.a) $f'(x)=\frac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$, $f'(0)=0, f(0)=-1$, deci ecuația este $y+1=0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x\nearrow-1} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\searrow-1} f(x)=+\infty,\ x=-1$ este asimptota verticală.

c) Din $\frac{\mathrm{k}^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)\left(k(k+1)+1\right)}{(k+1)\left(k(k-1)+1\right)}$, rezultă $\frac{3}{2}f(2)f(3)...f(n)=\frac{n^2+n+1}{n^2+n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{n^2}=e.$

2.a) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, de unde rezultă relația.

c) $0\le\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x dx\le\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n\frac{\pi}{3}dx=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$, deci limita cautată este 0.

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

b) $x_2=f(x_1)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\in(0,1)$ și, inductiv, $0<x_{n+1}<x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul este descrescător și mărginit.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+c_x^2}}\le 1.$

2.a) $\int_1^e \ln x\,dx = x\ln\Big|_1^e-\int_1^e 1dx=e-(e-1)=1.$

b) Cu schimbarea de variabilă $x=3-t$, $\int_1^2 f(x)dx=\int_2^1\dfrac{\ln t}{3-t}(-1)\,dt=\int_1^2\dfrac{\ln t}{3-t}dt=\int_1^2 g(x)dx.$

c) Pentru $x\in(0,3)$ avem $\dfrac{\ln(3-x)}{x}>\dfrac{\ln 2}{x}$, deci $\int_t^1 g(x)\,dx>\int_t^1\dfrac{\ln 2}{x}dx=\ln 2\cdot(-\ln t)$. Concluzia rezultă din $\lim\limits_{t\searrow 0}(-\ln 2\ln t)=\infty$.

Soluție

1.a) $f(1)=\frac{\pi}{4}, f'(1)=\frac{1}{2}$, deci ecuația este $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}$

c) Avem $g'(x)=\operatorname{arctg} x+\frac{x-1}{x^2+1}$, $g''(x)=\frac{2(1-x)}{(x^2+1)^2}$. Rezultă că g' este strict crescătoare pe $(-\infty,1]$ și strict descrescătoare pe $[1,\infty)$. Din $g'(1)>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)>0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}g'(x)<0$, reiese concluzia cerută.

2.a) $I_1=\int_0^1 x\sin x=-\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x dx=\sin 1-\cos 1.$

b) $x^n>x^{n+1}\Rightarrow I_n>I_{n+1}$; $\sin x>0\Rightarrow I_n>0$; $(I_n)_{n\geq 1}$ descrescător și mărginit, rezultă $(I_n)_{n\geq 1}$ convergent.

c) $I_{2n}=\int_0^1 x^{2n}(-\cos x)'dx=-x^{2n}\cos x\,\Big|_0^1+2n\int_0^1 x^{2n-1}(\sin x)'$

$=-\cos 1+2nx^{2n-1}\sin x\,\Big|_0^1-2n(2n-1)I_{n-1}=2n\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)I_{2n-2}$.

Soluție

1.a) $f_a'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+a}{x(x+1)}$.

b) $f_a''(x) = \frac{x(2a-1)+a}{x^2(x+1)^2}$. f convexă $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow 2a-1 \geq 0$ şi $\frac{a}{2a-1} > 0$, de unde $a \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right]$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x+a}} = 1$, folosind regula lui l'Hôpital.

2.a) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{4}$.

b) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin x)' dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, de unde $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

c) $\cos x \in [0;1]$ de unde $I_{n+1} < I_n$; în plus $I_n \geq 0$, deci şirul este descrescător şi mărginit inferior.

Soluție

1.a). $\lim\limits_{x \searrow 0}\left(x+\ln x\right)=-\infty$,deci $x = 0$ este asimptotă verticală; $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$, deci nu avem asimptotă orizontală; $m = 1$ dar n nu este finit, deci nu avem asimptotă oblică.

b) $g_n\left(x\right)=x^n+x^{-n}$, $g_n''\left(x\right)=n\left(n-1\right)x^{n-2}+n(n+1)x^{-n-2}>0, \forall x>0$, deci funcțiile sunt convexe.

c) Din $f_n\left(1\right)<2^n$ și $f_n\left(2\right)>2^n$, rezultă că $x_n \in \left(1,2\right)$, deci $\ln x_n \in \left(0,1\right)$. Deci $\sqrt[n]{2^n-1}<x_n<2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

2.a) $I_2=\int_0^a \frac{t^2}{t+1}dt=\int_0^a\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt==\frac{a^2}{2}-a+\ln\left(a+1\right)$

b) $I_n+I_{n-1}=\int_0^a \frac{t^n+t^{n-1}}{t+1}dt=\int_0^a t^{n-1}dt=\left.\frac{t^n}{n}\right|_0^a=\frac{a^n}{n}$.

c) $\frac{t^n}{t+1}<t^n, \forall t\in\left[0;a\right]$, $0<I_n<\int_0^a t^n dt=\frac{a^{n+1}}{n+1}\to 0, \forall a\in\left[0;1\right]$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2=m$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=0=n$, deci $y=2x$ asimptota oblică spre ∞.

b) $f^{'}(x)=\frac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\ge 0$, deci *f* este strict crescătoare, adică injectivă. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și *f* continuă, rezultă că *f* este surjectivă. Deoarece *f* este bijectivă rezultă că deci *f* este inversabilă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(e^x\right)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}\cdot e^3\cdot\left(e^{2x}+1\right)^{-\frac{1}{x}}=e.$

2.a) $F'(x)=e^{\sin^2 x}>0$, de unde F este strict crescătoare

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xF(x)dx=\frac{1}{2}\sin 2xF(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xF'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1-e}{2}.$

c) Conform teoremei l'Hôpital, pentru cazul $\frac{0}{0}$, avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $f'(e)=\dfrac{1}{e}$, $f(e)=0$, deci ecuația este $y=\dfrac{1}{e}(x-e)$.

b) $f''(x)=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}<0,\forall x>1$, deci *f* este concavă

c) Conform teoremei lui Lagrange există $c_x\in(x,x+1)$ *a.i.* $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\dfrac{1}{c_x\ln c_x}$.

Avem de calculat $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}$. Cum $\dfrac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)}<\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}<1$ limita căutată este 1.

2.a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\operatorname{arctg}(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

b) Fie *F* o primitivă a lui *f*. Atunci $F'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\geq 0,(\forall)x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, deci *F* este strict cresătoare pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Cu substituția $x=2\pi-y$ obținem $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}(2\pi-y)f(y)dy=2\pi\int_0^{2\pi}f(y)dy-I$, de unde $I=0$.

Soluție

1.a) $f_t'(x) = 3x^2 + t^2$

b) $f_t'(x) = 3x^2 + t^2 > 0$ pentru orice x real, deci funcția este strict crescătoare. $\lim\limits_{x\to\infty} f_t(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty$, f_t continuă $\Rightarrow$ f_t surjectivă. Cum funcția este strict crescătoare, deci injectivă, înseamnă că ea este inversabilă.

c) Avem $g^3(t) + t^2 g(t) = 1$, unde $1 \ge g(t) \ge 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} \sqrt[3]{1 - t^2 g(t)} = 1 = g(0)$.

2a) $f(1) = \int_0^1 \left(t^2 + 1\right)\sqrt{t}\,dt = \frac{20}{21}$.

b) $f(x) = \frac{2x^3\sqrt{|x|}}{7} + \frac{2x\sqrt{|x|}}{3}$, deci $f(-x) = -f(x)$, adică *f* este impară.

c) Conform teoremei lui Lagrange, există $c_x \in (x, x+1)$ astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = (c_x^2 + 1)\sqrt{c_x}$.

Cum $\frac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} < \frac{(c_x^2+1)\sqrt{c_x}}{x^2\sqrt{x}} < \frac{\left((x+1)^2+1\right)\sqrt{x+1}}{x^2\sqrt{x}}$, rezultă că limita căutată este 1.

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, deci *f* nu admite asimptotă spre $+\infty$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (n+1)x^n - (n+2) = 0$, deci avem punctul de extrem unic $x_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\,\Big|_0^1 - arctg\left(x\right)\Big|_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1}$.

c) $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n},\ \ \forall x \in \left[0,1\right] \Rightarrow 0 < I_n \le \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1} \to 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Soluție

1.a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ deci $y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $g'(x) = f'(x+1) - f'(x) - f'\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)' = 0 \Rightarrow g =$ constantă $= g(0) = 0$

c) $\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg}k$, deci $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$, iar $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 e^{-x}xdx = \int_0^1 x(e^{-x})'dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1$.

b) $I_n = \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)' x^n dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^1 + n\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx = -e^{-1} + nI_{n-1}$.

c) Avem $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, deci $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\searrow k} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\nearrow k} f(x)=-\infty$, $\mathrm{k}\in\{1,2,...,2009\}$, deci $x=k$ este asimptota verticală pentru $\mathrm{k}\in\{1,2,...,2009\}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\Rightarrow$ $\mathrm{y}=0$ este asimptota orizontală spre ∞ și spre $-\infty$.

b) $f'(x)<0$, deci f este strict descrescătoare pe fiecare interval inclus în A. Din $\lim\limits_{x\searrow k} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow k+1} f(x)=-\infty$ reiese că avem câte o soluție pe fiecare interval $(k,k+1)$, $k\in\{1,2,3,...,2008\}$, adică 2008 soluții. Apoi, din $\lim\limits_{x\searrow 2009} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,$ reiese că, pentru $a\neq 0$, mai avem și o soluție în $(-\infty,1)\cup(2009,\infty)$.

c) $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{2}{(x-2)^3}+...+\dfrac{2}{(x-2009)^3}$ se anulează în $(k,k+1)$ o singură dată, deci, avem 2008 puncte de inflexiune.

2.a) $f'(x)=e^{-x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $f''(x)=-2xe^{-x^2}\leq 0$, $\forall x\in[0;\infty)\Rightarrow f$ este concavă pe $[0;\infty)$.

c) $f(n)=\int_0^n e^{-t^2}dt$ și $f(n+1)-f(n)=\int_n^{n+1} e^{-t^2}dt>0\Rightarrow (f_n)_{n\geq 1}$ crescător. $e^{-t^2}\leq e^{-t}$ pentru $t\geq 1\Rightarrow$ $f(n)\leq\int_0^1 e^{-t^2}dt+\int_1^n e^{-t}dt\leq 1+\left(e^{-1}-e^{-n}\right)\leq 2\Rightarrow (f_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Deci $(f_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\le 0,\forall x\in[0;\infty)$.

b) L = $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+(x+1)^2}-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{2}{x^3}}=1$.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x+\dfrac{x^3}{3}$, atunci $g'(x)=\dfrac{x^4}{1+x^2}\ge 0$, deci g este strict crescătoare. Cum $g(0)=0$, rezultă $g(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$.

2.a) $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

b) $F'(x)=x^4 f(x)>0$ pentru $x\in\mathbb{R}^*$, deci F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Fie $A=\int_1^a f(x)dx.$ Dacă $a<1,$ atunci $A<0<\dfrac{1}{4}$, iar dacă $a\ge 1,$ atunci $A\le\int_1^a\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(1+a^2)}<\dfrac{1}{4}$.

Soluție

1.a) $f'(x) = nx^{n-1} - n$ şi $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \ge 0, \ \ \forall x \ge 0$, deci f este convexă.

b) Şirul lui Rolle ataşat ecuației $x^n - nx - 1 = 0,\ x \ge 0$ este:

x	0	1	∞
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

de unde concluzia.

c) Avem $f_n(1) < 0$ şi $f_n(n) = n^n - n^2 - 1 > 0$ pentru $n \ge 3$, deci $1 < x_n < n$. Din $x_n = \sqrt[n]{1 + nx_n}$ rezultă $1 \le x_n \le \sqrt[n]{1+n^2}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx = \ln\left(1+e^x\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{1+e}{2}$.

b) $g'(x) = f(x)\cos x + f(-x)\cos x = \cos x$, deci g este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

c) Din $g'(x) = \cos x$ şi $g(0) = 0$, rezultă $g(x) = \sin x$, deci $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Soluție

1. a) $f'(x) = \dfrac{3x^2+6x+2}{3\sqrt[3]{(x^3+3x^2+2x+1)^2}} - \dfrac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x+1)^2}}$

$f(0)=0,\ \ f'(0)=1$, deci ecuația este $y = x$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+3x}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2+2x+1)^2} + \sqrt[3]{(x^3+3x^2+2x+1)\left(x^3-x+1\right)} + \sqrt[3]{(x^3-x+1)^3}} = 1$, deci

$y=1$ este asimptota spre $+\infty$.

c) Din $f(k) = \sqrt[3]{k(k+1)(k+2)+1} - \sqrt[3]{(k-1)k(k+1)+1}$ deducem $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1} - 1$.

Limita cerută este de tipul 1^∞ și devine $l = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1}-n-1)} = e^0 = 1$.

2.a) $f_1(e) = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\dfrac{t^2}{2}\right)' \ln t dt = \dfrac{t^2 \ln t}{2}\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{e} - \dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} t dt = \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{3}{4e^2}$.

b) $f_n'(x) = x^n \ln x$, iar $x \in (0;1) \Rightarrow \ln x \le 0 \Rightarrow f'(x) \le 0$

c) $-1 \le \ln t \le 0\ \forall \text{x} \in \left[\dfrac{1}{\text{e}};1\right]$, rezultă $-\int_{\frac{1}{\text{e}}}^{1} t^n \le f_n(1) \le 0$, adică $-\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)e^{n+1}} \le f_n(1) \le 0$, deci

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$

Soluție

1a) $f'(x) = e^x + 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că funcția este strict crescătoare

b) Din punctul anterior rezultă ca functia este injectivă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, funcția este continuă, deci surjectivă, adică inversabilă.

c) Cu substituția $x = f(y)$ obținem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{\ln(e^y + y^3 - y^2 + y)} = 1$.

2a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) dx = 2\ln 3 - 3\ln 2$.

b) $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

c) $nI_n = \int_0^1 nx^n \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int_0^1 \frac{2x(x^n)'}{x+2} dx - \int_0^1 \frac{x(x^n)'}{x+1} dx = \frac{1}{6} - 4\int_0^1 \frac{x^n}{(x+2)^2} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{6}$